

Темы (задачи) для научных исследований по **МАТЕМАТИКЕ**

Примечания. 1) В списке тем могут быть дополнения и изменения.

2) Среди тем есть *как очень сложные* (с идеей реального продолжения и подготовки работ на Республиканские и Международные конференции и конкурсы, а также с последующей публикацией в научных изданиях), так и относительно простые (особенно для начала процесса исследования) – часто рядом с такими темами (задачами) или после условия стоит специальное примечание. Последнее, однако, не означает, что такая задача является в чем-то ущербной – при соответствующем погружении в задачу и получении определенных результатов любая задача превратится в достойную тему для представления на любом уровне!

В любом случае, если кто-то из руководителей предлагает некоторую тему для исследования, значит, он видит в ней определенный смысл и интерес в развитии и получении результатов!!!

3) Участники школы могут продолжать исследования по темам, ранее разрабатываемым в своих учебных заведениях. *Для этого в первые два дня работы необходимо заявить свою тему одному из ответственных за научные семинары по математике* (Задворный Б.В., Змейков Д.Ю., Калинин В.Н., Лавринович Л.И., Чурбанов Ю.Д.) и согласовать порядок работы с научным руководителем.

4) В качестве тем для исследования можно выбирать темы (исследовательские задания) из других источников, в частности, из списка заданий проблемного (научного) семинара по математике, заданий турниров юных математиков – от Минского городского (5-7 классы), республиканского (см. на сайте www.uni.bsu.by), международного (www.itym.org) и т.п.

Задворный Б.В. и другие

1. Карлсон и варенье (РТЮМ-2015)

I. а) У Карлсона есть 27 банок с вареньем. В банках находится 1, 2, 3, ..., 27 литров варенья соответственно. На завтрак Карлсон может съесть одно и то же целое число литров варенья из любых двух банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье. Может ли Карлсон съесть все варенье, если вначале было 29 банок, в которых содержалось 1, 2, ..., 29 литров варенья?

б) Попробуйте указать все натуральные значения n , при которых Карлсон может съесть варенье из n банок, в которых содержатся 1, 2, 3, ..., n литров варенья. При этом если при каких-то n он может это сделать, опишите алгоритм «съедания», а при остальных докажите, что такое невозможно. В первом случае при каждом n постарайтесь найти минимально возможное количество завтраков («съеданий»), за которое Карлсон может съесть варенье.

в) Попробуйте доказать, что алгоритм «съедания», предложенный вами в предыдущем пункте является оптимальным с точки зрения минимальности количества операций (под одной *операцией* будем понимать одно «съедание» по одинаковому числу литров из двух банок, при этом в разных операциях общее число литров варенья, естественно, может быть различным).

II. Попробуйте рассмотреть следующие обобщения той задачи.

1) У Карлсона есть $n = m+1$ банок с вареньем. В банках находится $s, s+1, s+2, \dots, s+m$ литров варенья соответственно. Операция та же, что и в части I задачи. Рассмотрите и попробуйте решить пункты, аналогичные пунктам I.б) и I.в). Рекомендуем начать решение с некоторых небольших значений m .

2) Пусть теперь у Карлсона n банок, в которых находится $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ литров варенья (все значения – натуральные числа). Попробуйте решить пункты, аналогичные пунктам I.б) и I.в). Рекомендуем начать решение с небольших значений n .

III. Для обобщения предыдущих пунктов рассмотрите следующие направления:

1) Карлсон может съесть одинаковое целое количество литров из любых трех банок.

2) Карлсон необязательно съедает все варенье, т.е. он может оставить некоторое минимальное количество «несъеденного» варенья (в частях I и II, конечно, это не более одного литра).

IV. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

2. Задача аптекаря. («можно начинать с 7-8 класса»)

1. Исходная постановка. У аптекаря есть набор гирек с весами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, ..., n г (всего n штук). При каких n их можно ли их разложить их на 3 равные по весу кучки и как это сделать.

2. Общая постановка.

2.1. У аптекаря есть набор гирек с весами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, ..., n г (всего n штук). При каких n их можно ли их разложить их на K равных по весу кучек и как это сделать (K – некоторое натуральное число).

2.2. У аптекаря есть набор гирек с весами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, ..., n г (всего n штук). При каких n их можно ли их разложить их на K равных по весу кучек так, чтобы остались гирьки общей массой ровно L г, и как это сделать (K – некоторое натуральное число, L – заданное натуральное число).

3. Задача о количестве острых и тупых углов (начиная с 8 класса).

Чему равно наибольшее число острых углов в плоском (несамопересекающемся) n -угольнике? А чему может быть равно наименьшее число тупых углов? Примечания. Для второго вопроса возможно рассмотрение двух случаев: а) величина тупого угла лежит в интервале $(90^\circ; 180^\circ)$, б) величина тупого угла лежит

в интервале $(90^\circ ; 360^\circ)$. Изменяются ли ответы во всех случаях, если вместе с острыми или соответственно тупыми углами рассматривать прямые углы?

А если на величины углов наложить какие-нибудь другие ограничения (предложите их сами)? А если n -угольник самопересекающийся?

Предложите свои вопросы для исследования в этой задаче и изучите их.

4. Суммы углов самопересекающихся многоугольников (начиная с 8 класса).

Для начала несколько определений. Самопересекающийся многоугольник – замкнутая ломаная линия, звенья которой могут пересекать друг друга. В противном случае многоугольник будет называться самонепересекающимся. Точки пересечения сторон многоугольника (или точки самопересечения) не являются его вершинами. Углами будем считать углы при вершинах многоугольника.

Сумму углов самопересекающегося многоугольника можно корректно определить, только для ориентированного многоугольника. Более точно:

если каждой стороне многоугольника задать направление, т.е. указать, какую из двух определяющих ее вершин мы будем считать ее началом, а какую – концом, и притом так, чтобы начало каждой стороны было концом предыдущей, то получится замкнутый многоугольный путь, или ориентированный многоугольник.

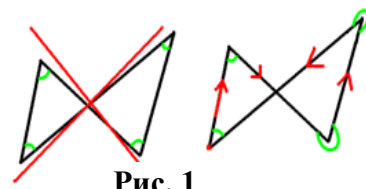


Рис. 1

В этом случае под его углом будем понимать угол между соседними сторонами, взятый с одной стороны (например, справа) относительно выбранного направления (см. рис. 1). Таким образом, сумму углов самопересекающегося многоугольника можно посчитать двояко («справа» относительно выбранного направления или «слева»).

Рассмотрите задачу нахождения сумм углов самопересекающихся многоугольников в двух основных направлениях.

Направление 1. Определение 1. Назовем точку самопересечения многоугольника *простой*, если часть многоугольного пути, определенного последовательными звеньями многоугольника, начинающаяся и заканчивающаяся в этой точке, не имеет других точек самопересечения. Указанную часть многоугольного пути назовем *петлей* самопересекающегося многоугольника.

Петли могут быть двух видов: внешние и внутренние (см. на рис. 2).

Определение 2. Самопересекающийся многоугольник назовем *многоугольником с петлями*, если он состоит из основной части (*основного многоугольника*) и нескольких петель. Основной многоугольник получается из самопересекающегося многоугольника с петлями отбрасыванием всех петель (отсечением петель в соответствующей точке самопересечения).

Для определенности выбор направления ориентированного многоугольника и углов будем далее осуществлять таким образом, чтобы в сумме углов учитывались внутренние углы основного многоугольника.

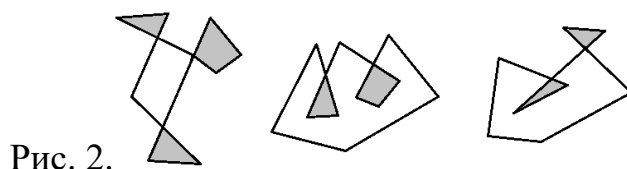


Рис. 2.

Задачи: 1.1) Найдите сумму углов самопересекающегося четырехугольника.

1.2) Найдите сумму углов самопересекающегося пятиугольника: а) с одной внешней петлей; б) с одной внутренней петлей.

1.3) Найдите сумму углов самопересекающегося n -угольника: а) с одной внешней петлей (двумя, тремя, ... внешними петлями); б) с одной внутренней петлей (двумя, тремя, ... внутренними петлями); в) с m внутренними и k внешними петлями.

1.4) Предложите свои задачи и обобщения в этом направлении и исследуйте их.

Направление 2. Определение 3. Назовем самопересекающийся многоугольник *правильным звездчатым*, если всего его стороны равны и каждая следующая повернута в одном и том же направлении, на один и тот же угол по отношению к предыдущей.

Свойство 1. Все вершины правильного звездчатого многоугольника лежат на одной окружности (окружности, описанной около него; попробуйте это доказать!).

Существуют различные виды правильных звездчатых многоугольников даже с одинаковым количеством вершин (сторон). Будем обозначать их $S(n, k)$, где n — число вершин (сторон) звездчатого многоугольника, k — через сколько вершин, расположенных на описанной окружности, находятся две его смежные вершины (т.е. соединенные одной стороной), если считать одну из этих смежных, $k < n/2$.

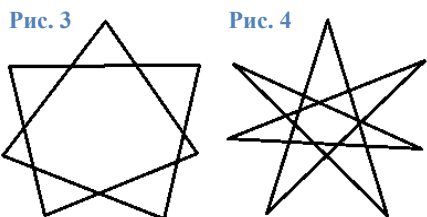


Рис. 3

Рис. 4

Например, для звездчатого семиугольника есть два различных вида: $S(7, 2)$ и $S(7, 3)$ (см. рис. 3 и 4).

Задачи: 2.1) Найдите сумму углов звездчатого пятиугольника.

2.2) Найдите сумму углов звездчатых семиугольников $S(7, 2)$ и $S(7, 3)$.

2.3) Исследуйте общий вопрос: для каких n и k существуют правильные звездчатые многоугольники вида $S(n, k)$. Найдите суммы углов таких многоугольников. (Для начала попробуйте рассмотреть хотя бы некоторые частные случаи.)

2.4) Предложите свои обобщения в этом направлении и исследуйте их.

Предложите свои направления исследования этой задачи и изучите их.

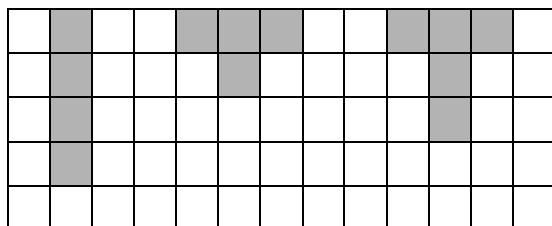
5. Размещение тетрамино и пентамино (задача 1-го М/нТЮМ, 2009)

0. На самом деле начните не с тетрамино и пентамино, а с прямоугольников и уголков из трех клеток. Остальной согласно условию!

А. Для данного прямоугольника $m \times n$ найти число $T(m, n)$ непересекающихся тетрамино разного вида (или пентамино, см. рис.), которые можно разместить

(вдоль линий прямоугольника) так, чтобы не было свободного места для размещения ни одной дополнительной фигуры.

Рассмотрите задачу отдельно для каждой из следующих фигур:



и другие.

Б. Два игрока играют на доске прямоугольной формы размером $m \times n$, расставляя по очереди тетрамино (пентамино как в пункте А). Проигрывает тот, у которого нет хода. Исследуйте эту игру: кто выигрывает на конкретных досках, какой стратегии он должен придерживаться и т.п.

Или по другому:

А. Задача о неплотной расстановке пентамино

- На клетчатой доске 6×6 вдоль линий клеток расставляются фигурки вида буквы Т (см. рис.) так, чтобы они не накладывались друг на друга (касаться углами или сторонами фигурки могут, а также их можно поворачивать на 90° , 180° или 270°). Расстановку фигурок назовем плохой, если на доску нельзя поставить никакой новой фигурки без нарушения указанных условий. Каким наименьшим количеством фигурок можно добиться плохой их расстановки?
 - Каким наименьшим количеством фигурок вы сможете добиться плохой их расстановки на доске 7×7 .
 - Исследуйте общую задачу о максимально неплотной расстановке фигурок типа «пентамино» на прямоугольных досках $m \times n$ (оцените количественные характеристики таких упаковок, возможные методы и алгоритмы упаковок и т.п.).
 - Два игрока играют на доске $m \times n$ по следующим правилам: каждый из них по очереди выставляет, если возможно на доску пентамино. Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или его соперник? Исследуйте игру при различных значениях m и n .
 - Предложите свои направления или обобщения в этой задаче и исследуйте их.
- Ответы для первых двух пунктов: а) Тринадцать фигурами. б) Тринадцать фигурами.

6. Специальная делимость (по мотивам из заданий ТЮМ 5-7 классов)

Начнем с классики:

- Доказать, что найдётся число вида $1111\dots11100000\dots0000$, делящееся нацело на 2014.
- Доказать, что найдётся число, записываемое одними единицами, кратное 2013.
- Найдётся ли такое натуральное число, заканчивающееся на цифры 2021 и кратное 2020?
- Найдётся ли такое натуральное число, заканчивающееся на цифры 2020 и кратное 2021?

5. Можно ли найти такую натуральную степень числа 3, которая оканчивается на ...0001?

Попробуем обобщить:

6. Пусть P и Q – произвольные простые числа.
- 6.1. Найдется ли такое натуральное число, заканчивающееся на Q и кратное P ?
- 6.2. Если да, то попробуйте найти наименьшее такое число.
- 6.3. Попробуйте найти все числа, удовлетворяющие условию пункта 6.1.
7. Пусть A и B – произвольные натуральные числа.
- 7.1. Для каких A и B найдется ли такое натуральное число, заканчивающееся на B и кратное A ?
- 7.2. Для тех чисел A и B , для которых ответ пункта 7.1 положительный найдите наименьшее такое число.
- 7.3. Попробуйте найти все числа, удовлетворяющие условию пункта 7.1.
8. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их. Одно из возможных направлений в п. 6 и 7 рассмотреть возможность построения чисел, дающих при делении на P и соответственно заданный остаток R . Некоторые новые направления могут быть придуманы исходя из пунктов 1, 2 и 5 начальной формулировки.

7. Общая задача о переливаниях (можно начинать с 7-8 класса, но в перспективе – очень сложная задача !!!)

I. Незамкнутая система сосудов

I.1) *Исходная задача.* (Источник – Математический фольклор). Имеются два сосуда, объемом в 3 и 5 литров. Как получить с их помощью ровно 4 литра воды?

Примечание. Во всех пунктах задачи сосуды имеют неправильную форму, т.е. нельзя наливать или переливать «на глазок», имеется возможности наполнять сосуды из внешнего источника, переливать воду из сосуда в сосуд до края (т.е. до указанного максимального объема каждого сосуда) и выливать воду в раковину (т.е. имеется некий сток). Такие задачи будем называть задачами на переливание в *незамкнутой системе* сосудов.

I.2) Решите подобные задачи для сосудов 5 и 7 литров, 4 и 6 литров, при этом укажите алгоритм, с помощью которого можно получить все возможные объемы воды. Обоснуйте, почему некоторые из объемов не получаются.

I.3) *Общая постановка задачи:* Имеются два сосуда с объемами A и B литров, A, B – натуральные числа. Для каких натуральных значений C имеется возможность с помощью этих сосудов получить ровно C литров воды. Укажите множество возможных значений C и алгоритм получения этих значений.

I.4) Исследуйте такую же задачу для трех сосудов с объемами A, B и C ($A < B < C$), в которой требуется получить ровно D литров воды. Укажите множество всех возможных значений D и способы (алгоритмы) их получения.

I.5) Рассмотрите вопросы предыдущих пунктов для n сосудов.

I.6) Попробуйте исследовать различные подходы к решению этих задач на оптимальность, другими словами, попробуйте найти и обосновать самый короткий

по числу переливаний алгоритм получения различных объемов воды. Начните изучение этого пункта со случая двух сосудов: в частности, попробуйте получить общую формулу числа требуемых операций (т.е. переливаний) в зависимости от A , B и C ?

II. Замкнутая система сосудов

II. 1) Исследуйте аналогичную задачу для трех сосудов с объемами A , B и C ($A < B < C$), с той разницей, что в условиях переливания *нет источника и стока*, но самый большой по объему сосуд, полностью заполнен водой. Такие задачи будем называть задачами на переливание в *замкнутой системе* сосудов.

II. 2) Рассмотрите различные варианты задачи для n сосудов в случае замкнутой системы (предложите соответствующие определения и варианты самостоятельно).

III. Исследуйте другие (сопутствующие) вопросы в этих задачах, а также предложите свои обобщения или направления и изучите их.

из заданий 9-го Минского городского открытого Турнира юных математиков

(младшая лига – 5-7 классы)

16-19 марта 2022 года

№ 8. Близкие числа

Для произвольного натурального числа A обозначим через $S(A)$ сумму всех делителей этого числа, считая 1 и само число. Назовем два числа A и B « n -близкими», если модуль разности $|S(A) - S(B)| = n$. Такое значение n будем называть степенью близости чисел A и B .

- 1) Найдите все «1-близкие» числа с числом 2.
- 2) Найдите все «2-близкие» числа с числом 3.
- 3) Определите степень близости чисел 2^n и 2^{n+1} , где $n \in \mathbb{N}$?
- 4) Могут ли числа вида $A = p_1^k$ и $B = p_1^n$ быть «1-близкими», «2-близкими», «4-близкими», где p_1 – простое число и $k \neq n$?
- 5) Рассмотрим число 2^n при некотором фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Какие числа вида 3^b , $b \in \mathbb{N}$, могут быть «1-близкими», «2-близкими» с этим числом?
- 6) Рассмотрим число 3^n при некотором фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Какие числа вида 2^b , $b \in \mathbb{N}$, могут быть «1-близкими», «2-близкими» с этим числом?
- 7) Определите наименьшую возможную «близость» среди чисел вида $A = p_1 p_2^2$ и $B = p_2 p_1^2$, где p_1, p_2 – простые числа.
- 6) Как Вы можете обобщить предыдущие пункты? Предложите свои направления обобщений и исследуйте их.

№ 9. Фигурки на сетке

Будем рисовать на клетчатой бумаге фигурки, состоящие из клеток нарисованной на бумаге сетки. Длину стороны каждой клетки будем считать равной 1.

Исходная задача.

- 1) Нарисуйте фигуру, состоящую из десяти клеток 1×1 , периметр которой равен 18. Сколько таких фигур вы сможете нарисовать? (Фигурки не обязательно должны быть выпуклыми и даже связными, т.е. могут состоять из двух или более многоугольников. Однако фигуры, получающиеся друг из друга поворотами или симметриями, будем считать один раз.)
- 2) Какой наибольший (наименьший) периметр может иметь фигурка, состоящая из 10 клеток?
- 3) Какое наименьшее (наибольшее) число клеток может понадобиться, чтобы нарисовать фигурку с периметром 10.
- 4) Во всех этих пунктах (а также последующих пунктах этой задачи), кроме вопросов существования или минимальности (максимальности), интерес представляют количественные данные, т.е. сколько имеется фигурок, удовлетворяющих заданным условиям. Другими словами, исследуйте количество возможных фигур, удовлетворяющих условиям из различных пунктов.

Возможные обобщения:

А. Увеличьте число клеток и рассмотрите различные варианты пунктов из исходной задачи.

Б. Сформулируйте аналогичные задачи для несвязных фигур (т.е. рассматриваемых как объединение нескольких многоугольников) и исследуйте пункты 1-4 в этом случае.

В. Рассмотрите задачу на бумаге с сеткой другого вида (например, состоящей из равносторонних треугольников).

Г. Изучите возможность использования результатов задачи в упаковках, укладках, в дизайнерских целях и т.п.

Д. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 10. Уравнение в целых числах

1. Определите натуральное значение n так, чтобы уравнение $x^2 - y^2 = 2^n$ имело ровно 2022 решения в натуральных числах.
2. Найдите натуральное значение n такое, что уравнение $x^2 - y^2 = 36^n$ имеет а) 49, б) 199, в) 2047 решений в натуральных числах.
3. Докажите, что для любого натурального значения n уравнение $x^2 - y^2 = 2017^n$ имеет больше решений в натуральных числах, чем уравнение $x^2 - y^2 = 2^n$.
4. Докажите, что для любого натурального значения n уравнение $x^2 - y^2 = 2017^{4n}$ имеет меньше решений в натуральных числах, чем уравнение $x^2 - y^2 = 72^n$.
5. Определите натуральное значение n такое, что уравнения $x^2 - y^2 = 20\,000$ и $x^2 - y^2 = 4^n$ имеют одинаковое количество решений в натуральных числах.
6. Определите наименьшее натуральное значение n для которого уравнение $x^2 - y^2 = n$ имеет ровно 11 решений в натуральных числах.

7. Сколько существует натуральных значений n , меньших 1 000 000 таких, что уравнение $x^2 - y^2 = n$ имеет ровно 3 решения в натуральных числах?
8. Пусть $F(m)$ — количество решений уравнения $x^2 - y^2 = m$ в натуральных числах. Предложите оценку или дайте точное значение для а) $F(2^k)$, б) $F(3^k)$, в) $F(2^{k_1}3^{k_2})$, г) $F(N)$, где k, k_1, k_2, N — натуральные числа.
9. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 11. Плюс-умножить.

Леша придумал новую операцию «плюс-умножить» и значок для нее $\ddagger$ (код знака в юникоде 2021). Результат этой операции - это сумма суммы и произведения двух чисел, т.е. $a \ddagger b = ab + a + b$. Будем считать, что числа a и b рациональные.

1. Обладает ли операция Леша свойствами коммутативности: $a \ddagger b = b \ddagger a$, и ассоциативности: $(a \ddagger b) \ddagger c = a \ddagger (b \ddagger c)$?
2. Обладает ли операция «плюс-умножить» свойством дистрибутивности со сложением и с умножением? Т.е. $(a \ddagger b) \times c = (a \times c) \ddagger (b \times c)$, или $(a + b) \ddagger c = a \ddagger c + b \ddagger c$, или $(a \times b) \ddagger c = a \ddagger c \times b \ddagger c$ для любых рациональных a, b, c ?
3. Помогите Леше придумать такую операцию « $*$ », чтобы вместе с операцией «плюс-умножить» выполнялось свойство дистрибутивности, т.е. $(a * b) \ddagger c = a \ddagger c * b \ddagger c$
4. Существует ли у операции «плюс-умножить» «ноль» и «единица» операции? Т.е. существует ли такое a_0 (так мы называем «ноль» операции), что для любого рационального x выполняется $a_0 \ddagger x = x \ddagger a_0 = a_0$. И существует ли такое a_1 (так мы называем «единицу» операции или нейтральный элемент), что для любого рационального x выполняется $a_1 \ddagger x = x \ddagger a_1 = x$. Будет ли a_0 нейтральным элементом для Вашей операции « $*$ » из пункта 3? Если нет, то придумайте другую операцию « $*$ », чтобы выполнялось условие пункта 3 и элемент a_0 был для него нейтральным.
5. Назовем числа x и y «мультиобратными», если $x \ddagger y = y \ddagger x = a_1$ и «мультипротивоположными» если $x * y = y * x = a_0$. Верно ли что, для любого рационального числа $x \neq a_0$ существует ровно одно рациональное y , такое, что x и y «мультиобратное»? Аналогичный вопрос про «мультипротивоположное» число.
6. Определите обратные операции для операций « $*$ » и « $\ddagger$ ».
7. Теперь будем говорить, что целое число x «делится с плюсом» на целое y , если существует целое число k , такое что $y \ddagger k = x$, и число y будем называть «плюс-делителем» числа x . Верно ли, что если целое число a «делится с плюсом» на целое число b , которое «делится с плюсом» на целое число c , то a «делится с плюсом» на число c .
8. Целое неотрицательное число p будем называть «плюс-простым», если в множестве целых неотрицательных чисел у него ровно два «плюс-делителя» и

«плюс-составным», если таких делителей больше двух. Сколько существует целых неотрицательных чисел, которые не являются ни «плюс-простыми», ни «плюс-составными»? Сколько «плюс-простых» чисел меньше 100?

9. Теперь Леша придумал операцию «плюс-степень». Для того, чтобы число x возвести в «плюс-степень» k (записывать будем как $x^{\ddagger k}$) надо сделать с числом x операцию «плюс-умножить» $k-1$ раз. Например, $x^{\ddagger}x^{\ddagger}x^{\ddagger}=x^{\ddagger 3}$. Верно ли, что для любых рациональных x, y и натурального k верно $(x^{\ddagger}y)^{\ddagger k}=x^{\ddagger k}y^{\ddagger k}$.
10. Недавно Леша узнал основную теорему арифметики. Существует ли «своя основная теорема арифметики» для операции «плюс-умножить»? Попробуйте самостоятельно сформулировать ее и доказать.
11. Можно ли с помощью основной теоремы арифметики из пункта 10 посчитать количество «плюс-делителей» любого числа?
12. Придумайте свои обобщения в этой задаче и исследуйте их.

№12. Заполняя таблицу

Исходная постановка. Лера вписывает в ячейки таблицы 3×3 , либо 1, либо 0. После того как она заполнит всю таблицу она начисляет себе очки по следующему правилу: если сумма чисел в какой-то строке или столбце или на больших диагоналях является нечётной, то она начисляет себе дополнительный балл. Например, таблица на рисунке слева ей приносит 0 очков, а таблица на рисунке справа — 3 очка.

1	1	0
1	0	1
0	1	1

1	1	1
1	0	1
0	1	1

1. Приведите пример таблицы, которая принесет Лере ровно 1 очко.
2. Приведите пример таблицы, которая принесет Лере ровно 8 очков. Найдите все такие таблицы (с точностью до поворотов и симметрий).
3. Для каких чисел от 2 до 7 существуют таблицы, которые принесут соответствующее число очков?
4. Сколько существуют таблиц, которые принесут Лере чётное количество очков?

Общая постановка

5. Рассмотрите аналогичные задачи для таблиц других размеров (квадратных и прямоугольных).
6. Будем называть таблицы, приносящие k очков k -таблицами. Попробуйте определить число k -таблиц для таблиц различных фиксированных размеров. (Конечно, искомое значение будет зависеть от размеров и может быть задано общей или рекуррентной формулой.)
7. Предложите свои обобщения. Ниже предложено несколько возможных направлений обобщения:

А. В таблицы расставляются числа 0, 1 или 2, а очки начисляются в зависимости от остатка при делении соответствующей суммы на 3. И т.д.

Б. Рассматриваются таблицы треугольного вида (т.е. таблица – это равносторонний треугольник со стороной n , разрезанный прямыми, параллельными сторонам исходного треугольника на n^2 одинаковых маленьких треугольников).

В. Рассматриваются трехмерные таблицы $3 \times 3 \times 3$ и т.п.

Г. В ряде случаев (в том числе в первоначальной общей постановке) интересно рассматривать даже упрощенный вариант, когда очки начисляются только за суммы по строкам и столбцам (без диагоналей).

№ 13. Детская комбинаторика и расстояния

Везде в этой задаче предлагается рассматривать расположение объектов (остановок, деревьев, точек и т.п.) в различных возможных порядках, не обязательно именно в том, в котором, может быть, они были указаны в начале. При этом величиной остановок, толщиной деревьев можно пренебрегать, т.е. считать их точками на числовой прямой

1. На прямой дороге расположены четыре остановки: А, В, С и D. Известно, что расстояние между остановками А и D равно 1 км, между В и С – 2 км, между В и D – 3 км, между А и В – 4 км, между С и D – 5 км. Чему равно расстояние между остановками А и С?

2. Вдоль аллеи растут четыре дерева. Попарные расстояния между некоторыми из них равны 63, 14 и 84 метра (известно, что в эти пары входят все 4 дерева, но в каком порядке – неизвестно). Сколько деревьев надо еще посадить, чтобы расстояние между любыми двумя соседними деревьями было одинаковым?

2.1. Тот же вопрос, что и в пункте 2, но в случае расстояний между деревьями выраженными через целочисленные параметры a, b, c .

Рассмотрите этот пункт в различных аспектах:

А. Расстояния между деревьями должны быть целочисленными.

Б. Расстояния между деревьями могут быть дробными вида $1/p$, где p – некоторое натуральное число.

3. Отметьте на прямой четыре точки.

А. Сколько различных (по длине) отрезков могут задавать эти точки? Укажите все варианты.

Б. Будем считать полученные расстояния, равные длинам отрезков из подпункта 3.А «эталонными» линейками (без делений). Пусть имеется сколько угодно палочек, равных по длине эталонным отрезками. Какие расстояния можно отмерить такими палочками.

3.1. Ответьте на вопрос пункта 3, если точек 5 (или более).

4. Предложите свои обобщения в этой задаче и изучите их.

№ 14. Наложение

Во всех пунктах этой задачи под словами «наложите фигуры» (и т.п.) будем понимать задачу нарисовать (расположить) на бумаге указанные фигуры так, чтобы выполнялись определенные условия.

1. Наложите (нарисуйте на бумаге) два треугольника (не обязательно равных), чтобы в пересечении фигур получился треугольник.
2. Какие многоугольники можно получить пересечением треугольников?
3. Какое наибольшее число сторон может быть у многоугольника, полученного пересечением выпуклого четырехугольника и треугольника? Ответ обоснуйте.
4. Какое наибольшее число сторон может быть у многоугольника, полученного пересечением выпуклых четырехугольника и пятиугольника? Ответ обоснуйте.
5. Какое наибольшее число сторон может быть у многоугольника, полученного пересечением выпуклых m -угольника и n -угольника? Ответ обоснуйте.
6. Если во всех предыдущих пунктах разрезать бумагу по сторонам многоугольников, то сколько получится кусочков бумаги? (Внешнюю часть многоугольников не считать.)
7. А если в некоторых пунктах задачи рассматривать невыпуклые фигуры (например, невыпуклые четырехугольники). Как изменятся ответы в этих пунктах?
8. Предложите свои обобщения в этой задаче и изучите их.

Задача 15. Задача о дружбах, рукопожатиях и улыбках. (по мотивам из заданий ТЮМ 5-7 классов)

- 1) *Исходная задача.* В седьмом классе некоторой школы каждый мальчик дружит с 5-ю девочками и 6-ю мальчиками, а каждая девочка дружит с 6-ю мальчиками и 5-ю девочками. А) Сколько школьников учится в этом классе, если известно, что их не более тридцати? Б) А если их не более 35?
- 2) Перед началом уроков классный руководитель заметил, что каждый учащийся его класса поздоровался за руку с шестью девочками и восемью мальчиками. При этом количество рукопожатий между мальчиками и девочками было на пять меньше числа остальных рукопожатий. Сколько учеников в классе?
- 3) На олимпиаду по математике прибыло несколько учащихся 8 класса. Некоторые из них оказались уже знакомыми. При встрече Маша улыбнулась своему знакомому Саше, а Коля улыбнулся незнакомой ему девочке Оле. И вообще, каждая восьмиклассница улыбнулась каждому знакомому ей восьмикласснику, а каждый восьмиклассник улыбнулся незнакомой ему восьмикласснице. В результате было зафиксировано 155 улыбок. Сколько всего учащихся 8 класса участвовало в олимпиаде?

4) *Общая постановка.* Исследуйте задачи 1) – 3) при различных значениях параметров (числа дружб, рукопожатий, улыбок и проч.), или более подробно:

А) пусть в первом пункте каждый учащийся дружит с M мальчиками и N девочками, изучите возможные количества детей в классе (школе и т.п.), а также когда подобные ситуации невозможны;

Б) в пункте 2) помимо условий, указанных в обобщении А, рассмотрите различные значения разностей между рукопожатиями различных групп детей,

В) во всех пунктах и условиях предложите свои значения параметров (или задайте другие – свои параметры) и изучите разрешимость задач в этих случаях.

5) Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 16. Вокруг теоремы Пика

Пусть на плоскости введена сетка (можно говорить, что сетку образуют прямые $x = i$, $y = j$, где $i, j \in \mathbb{Z}$; точки пересечения данных прямых будем называть узлом сетки). *Клетчатым многоугольником* будем называть многоугольник без дырок, все вершины которого расположены в узлах сетки. Для вычисления площадей клетчатых многоугольников существует формула Пика:

$$S = I + \frac{B}{2} - 1,$$

где I — количество узлов внутри многоугольника, B — количество узлов, лежащих на сторонах многоугольника.

Рассмотрим куб, на гранях которого введена сетка. Верна ли, что для клетчатых многоугольников, расположенных на гранях куба (многоугольник не обязан располагаться на одной грани куба!) формула Пика? Если не верна, то предложите аналогичную формулу для таких многоугольников. Рассмотрите так же и более сложные поверхности: например, рассмотрите фигуру, которая получается вырезанием из куба прямоугольного параллелепипеда меньших размеров.

Или по другому:

Обобщение формулы Пика

Пусть F — многоугольник (не обязательно выпуклый) на плоскости с целочисленными вершинами (то есть обе координаты каждой вершины являются целыми числами). Обозначим через $N(F)$ количество целочисленных точек, расположенных внутри фигуры F , $B(F)$ — количество целочисленных точек на границе F и наконец $\overline{N}(F) = N(F) + B(F)$ — количество точек на границе или внутри F . Известна формула Пика, которая вычисляет площадь $S(F)$:

$$S(F) = N(F) + B(F)/2 - 1.$$

Целью этой задачи является обобщение этой формулы на многомерный случай. Во всех пунктах задачи интересно получить соответствующие формулы в частных

случаях (например, для фигур определенного вида: прямоугольных треугольников или тетраэдров, ромбов или прямоугольных параллелепипедов и т.п.).

0. Докажите формулу Пика.

1. Покажите, что формула Пика не допускает прямого обобщения на трехмерный случай, то есть объем $V(F)$ многогранника F с целочисленными вершинами не может быть выражен через числа $N(F)$ и $B(F)$ целочисленных точек внутри и на границе многогранника.

Указание. Рассмотрите тетраэдр с координатами $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,t)$.

Для любого натурального числа k обозначим через kF фигуру, которая получается из F гомотетией с коэффициентом k и центром в начале координат. Определим функции $p(k) = N(kF)$, $\bar{p}(k) = \bar{N}(kF)$.

2. Пусть F – многоугольник с целочисленными вершинами.

(а) Докажите, что $\bar{p}(k)$ является квадратным полиномом от k , то есть $\bar{p}(k) = p_2 k^2 + p_1 k + p_0$ для любого натурального числа k , причем $p_2 = S(F)$, $p_1 = B(F)/2$, $p_0 = 1$.

(б) Докажите, что $p(k) = \bar{p}(-k)$.

В пунктах 3-5 фигура F является многогранником в трехмерном пространстве с целочисленными координатами.

3. Вычислите полиномы $p(k)$ и $\bar{p}(k)$ для следующих многогранников F :

(а) куб с вершинами в точках (x_1, x_2, x_3) , $x_i = 0$ или $x_i = 1, i = 1, 2, 3$;

(б) тетраэдр с вершинами в точках $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$;

(с) октаэдр с вершинами в точках $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$;

(д) тетраэдр из указания к пункту 1.

(е) прямоугольная призма высотой 1, основанием которой является многоугольник с целочисленными координатами.

4. Докажите, что $\bar{p}(k)$ является кубическим полиномом по k , старший коэффициент которого равен объему $V(F)$. Какой геометрический смысл имеют остальные коэффициенты этого полинома?

5. Докажите, что $p(k) = -\bar{p}(-k)$.

6. Найдите полиномы $p(k)$ и $\bar{p}(k)$ для n -мерных аналогов куба, тетраэдра и октаэдра из пунктов 3а-3с.

7. Попробуйте обобщить пункты 4 и 5 на многомерный случай.

8. Предложите свои обобщения или направления исследования и изучите их (возможно, например, рассмотрение подобных вопросов для фигур расположенных на плоскости, покрытой треугольной решеткой, и т.п.).

Литература. А. Кушниренко, Целые точки в многоугольниках и многогранниках, Квант, N4, 1977, С.13-20.

1. **Целочисленные задачи на графах.** Имеется N городов, соединенных сетью дорог. В некоторых городах производится товар. В других он потребляется. Для перевозки товара от производителя к потребителю используются транспортные средства определенной грузоподъемностью. Оплата взимается за использование транспортного средства и не зависит от объема перевозимого товара. Требуется организовать перевозку таким образом, чтобы минимизировать стоимость. (8-10. Необходимы навыки программирования.)
2. **Случай на производстве.** Производство состоит из двух технологических линий. Первая разливает напиток по бутылкам. Вторая закручивает бутылки. На производство поступили N бутылок различных типов. Для каждого типа известно время наполнения и время закручивания. Требуется разработать алгоритмы подачи бутылок на линии, что бы время обработки было минимальным. (8-10)
3. **Комбинаторика и вероятность на графе.** Путешественник Вася решил проехать по городам Беларуси. Будем считать, что два города соседние, если они соединены прямой дорогой (т.е. не проходящей через другие города). Вася находится в Минске. За день он может переехать в любой соседний город (даже в тот в котором он уже бывал). Через месяц он оказался в Радосковичах. Определить количество всевозможных путей Васи. А также вероятность того, что за этот месяц Вася уже бывал в Радосковичах. (9-10 классы)
4. **ε -оптимальные многоугольники на целочисленной решетке.** Назовем правильный n -угольник ε -оптимальным ($0 < \varepsilon < 0,5$), если все его вершины лежат в ε -окрестности узлов целочисленной решетки, и при этом его площадь минимальна. Для каждого n найдите площади ε -оптимальных n -угольников, а также все их возможные расположения на решетке. (8-10 классы)
5. **Угадывание чисел.** Двое играют в игру: один задумывает некоторое число, второй называет k чисел из промежутка от 1 до n . Первый прибавляет к задуманному числу одно из них и говорит результат и т.д. Найти минимальное число ходов, за которое второй игрок сможет определить задуманное число. Та же задача, но первый игрок проводит другую операцию над числами (вычитает, умножает, делит, возводит в степень и т.д) (7-10 классы)

6. **Фигуры наибольшей площади.** На координатной плоскости задать множество точек наибольшей площади, удовлетворяющее условию: для любых двух точек множества площадь треугольника с вершинами в начале координат и в этой точке не превосходит α . (9-10 классы)
7. **Графики с модулем.** Известно, что графиком функции, содержащей модули от линейных выражений, является ломанная. 1. По ломанной восстановить функцию или уравнение ее задающее. 2. Определить наименьшее количество знаков модуля для задания этой ломанной. 3. Всякую ли ломанную можно задать с помощью линейного выражения с модулями. (7-10 классы)
8. **Квадраты в различных системах счисления.** Для данного числа N , записанного в десятичной системе счисления, определить существует ли такая система счисления, в которой число, записанное теми же цифрами, что и N , будет полным квадратом. Определить условия, когда не существует такой системы счисления. Если она существует, то определить единственна ли она. (7-9 классы)
9. **Числа в различных системах счисления.** Существуют числа, которые в различных системах счисления записываются одинаковым набором цифр. Например $196_{10} = 169_{11}$. Попробуйте найти еще такие числа и системы счисления. Получите условия их существования. (7-9 классы)
10. **Крестики-нолики.** Двое играют в игру на бесконечном листе бумаги. За ход один ставит N крестиков в любом месте. Другой – M ноликов. Последующими ходами можно ставить крестики и нолики только в клетки с уже помеченными. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Исследовать выигрышные стратегии. (Квант 1971) (7-9 классы)

Чурбанов Ю.Д..

1. Интересные числа

1а. . Натуральное число N называется интересным, если оно задаётся трёхзначным числом $\overline{abc}$ (то есть, $N = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$, $0 \leq a, b, c, \leq 9$) таким, что $a + c = b$. Сколько существует пар интересных чисел, сумма которых тоже является интересным числом?

1б. Натуральное число N называется интересным, если оно задаётся четырёхзначным числом $\overline{abcd}$ (то есть, $N = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$, $0 \leq$

$a, b, c, d \leq 9$) таким, что $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$. Сколько существует пар интересных чисел, сумма которых тоже является интересным числом?

1с. Натуральное число N называется интересным, если в системе счисления с основанием t оно задаётся трёхзначным числом $\overline{abc}$ (то есть, $N = at^2 + bt + c$, $0 \leq a, b, c, \leq t - 1$) таким, что $a + c = b$. Сколько существует пар интересных чисел, сумма которых тоже является интересным числом?

1д. Натуральное число N называется интересным, если в системе счисления с основанием t оно задаётся четырёхзначным числом $\overline{abcd}$ (то есть, $N = at^3 + bt^2 + ct + d$, $0 \leq a, b, c, d \leq t - 1$) таким, что $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$. Сколько существует пар интересных чисел, сумма которых тоже является интересным числом? (8 – 10 кл)

2. О некоторых соотношениях в равнобедренных треугольниках и не только

2а. В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b угол при вершине равен 20° . Доказать, что $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

2б. В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b угол при вершине равен 80° . Докажите, что $a^3 + \sqrt{3}b^3 = 3ab^2$.

2с. Обобщите полученные формулы, т.е. угол при вершине равен α . (8 – 10 кл)

3. Прибор

С помощью прибора можно делать следующие операции:

а) если даны две точки, то провести через них прямую;

б) если на прямой дана точка, то восстановить перпендикуляр к этой прямой в этой точке.

Как с помощью этого прибора опустить из данной точки, не лежащей на прямой, перпендикуляр на эту прямую. Постарайтесь найти как можно больше различных (по количеству шагов) решений.

(7 – 10 кл)

4. Необычные метрики – 1

Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ – точки на координатной плоскости. Будем измерять расстояние между ними по формуле $AB = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Изобразите на координатной плоскости : окружность, эллипс, гиперболу, окружность Апполония. (8 – 10 кл)

5. Необычные метрики – 2

Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ – точки на координатной плоскости. Будем измерять расстояние между ними по формуле $AB = \max(|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|)$. Изобразите на координатной плоскости : окружность, эллипс, гиперболу, окружность Апполония. (9 – 10 кл)

6. Сколько деталей

6а. В токарном цехе вытачиваются детали из стальных заготовок, из одной заготовки вытачивается одна деталь. Стружки, оставшиеся

после обработки трёх заготовок, можно переплавить и получить ещё одну заготовку.

а) Сколько всего деталей можно сделать из 9 заготовок?

в) Сколько нужно взять заготовок, чтобы получить 40 деталей?

6b. В токарном цехе вытачиваются детали из стальных заготовок, из одной заготовки вытачивается одна деталь. Стружки, оставшиеся после обработки a заготовок, можно переплавить и получить ещё одну заготовку.

а) Сколько всего деталей можно сделать из b заготовок?

в) Сколько нужно взять заготовок, чтобы получить x деталей? (5 – 7 кл)

Калинчук В.Н.

19. Новая жизнь неравенств. (по этой задаче – отдельное представление, для 10 класс)

20. Лампочки.

а) В каждой клетке квадрата $n \times n$ расположена лампочка, которая в любой момент времени находится в одном из двух состояний: горит или не горит. Нажав на любую лампочку, меняем ее состояние, а также всех лампочек, находящихся в той же строке и в том же столбце. За какое наименьшее число нажатий можно зажечь все лампочки, если вначале они все не горят. Решить задачу для:

б) прямоугольника $m \times n$

в) прямоугольного параллелепипеда $m \times n \times k$ если состояние меняется по трем направлениям

г) равностороннего треугольника $n \times n \times n$ если состояние меняется по трем направлениям

д) равнобедренного треугольника $m \times n \times n$ если состояние меняется по трем направлениям

е) произвольного треугольника $m \times n \times k$ если состояние меняется по трем направлениям

21. Задача о средних. Средне арифметическое n действительных чисел равно 0, а средне арифметическое их квадратов равно 1. Какое наибольшее значение может принимать произведение этих чисел. Рассмотреть свои закономерности.

22. ГМТ = геометрические места точек (разные направления) Найти геометрическое место точек плоскости, из которых под прямым углом видны

а) парабола $x^2 = 2py$

б) эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

в) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

г) рассмотрите другие кривые или другие углы.

Исследовательские задачи для Республиканской летней школы 2022

Давид Юрьевич Змейков

1. СУММЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ПЕРЕСТАНОВКАХ

1. Найдите наибольшее число A такое, что в любой перестановке чисел $1, \dots, 100$ существуют десять последовательно записанных чисел с суммой не меньше A .
2. Даны натуральные числа n и $k \leq n$. Найдите наибольшее число A такое, что в любой перестановке чисел $1, \dots, n$ существуют k последовательно записанных чисел с суммой не меньше A .

2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

1. Множество точек на плоскости назовем *прямоугольным*, если для любой его раскраски в два цвета найдется хотя бы один прямоугольный треугольник с вершинами одного и того же цвета. Определите, являются ли следующие множества прямоугольными:
 - a) окружность;
 - b) эллипс;
 - c) граница равностороннего треугольника;
 - d) граница правильного n -угольника;
 - e) парабола.
2. Опишите действительные функции $f(x)$, заданные на конечном или бесконечном интервале, чьи графики являются прямоугольными множествами.
3. Попробуйте классифицировать прямоугольные множества.
4. Введите также понятия *равнобедренного*, *равностороннего* и *квадратного* множества и исследуйте аналогичные вопросы.

3. ИГРЫ СОЕДИНЕНИЙ

1. Боря нарисовал на листе бумаги n точек и стал играть следующим образом. За каждый ход он выбирает какие-то две из имеющихся точек, соединяет их кривой линией и рисует на этой линии еще одну точку. При этом всегда из каждой точки должно выходить не более трех линий и линии не должны пересекаться.
 - a) Докажите, что Боря не сможет играть бесконечно долго.
 - b) Какое число ходов он сможет сделать прежде, чем больше уже нельзя будет провести новую линию (найдите все возможные варианты)?
2. Боре стало скучно и он позвал себе в компанию Лёню. Они решили ходить по очереди, соблюдая вышеуказанные правила игры. Проигрывает тот, кто первым больше не сможет провести линию. Боря начинает.
 - a) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $n = 2$?
 - b) Найдите выигрышную стратегию для любого n .
3. А что будет если Боря пригласит играть еще и своих учеников?
4. Попробуйте обобщить задачу, а также исследовать другие направления.

4. ВЛОЖЕНИЕ ОДНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА В ДРУГОЙ

Обозначим через P и Q треугольники с длинами сторонами p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 соответственно. Какие условия (необходимые и/или достаточные) нужно наложить на p_i и q_i , чтобы в треугольнике P можно было поместить треугольник Q ?

5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПИРСА

Пусть $a > b$ произвольные натуральные числа. Рассмотрим рекуррентную последовательность $(b_i)_{i \geq 0}$, в которой $b_0 = b$ и b_{i+1} равен остатку числа a при делении на b_i :

$$b_{i+1} = a \bmod b_i \quad \text{для любого } i \geq 0.$$

Определим $P(a, b)$ как наименьшее натуральное число n такое, что $b_n = 0$.

Задача. Найдите верхние и нижние оценки для $P(a, b)$, зависящие только от a . Докажите, например, что $P(a, b) \leq Ca^{1/3}$ для некоторой константы $C \in \mathbb{R}$ и попытайтесь улучшить эту оценку.

6. БИНАРНЫЕ РАССТАНОВКИ КРУГОВ И МНОГОУГОЛЬНИКОВ

1. Имеется n кругов единичного радиуса. Их разместили в круге радиуса R , так чтобы никакая прямая не пересекала более двух кругов единичного радиуса. Каково минимальное значение R ?

2. Имеется n правильных k -угольников со стороной один. Их разместили в правильном k -угольнике со стороной S так, чтобы каждый единичный k -угольник был гомотетичен исходному (коэффициент гомотетии положителен) и никакая прямая, параллельная сторонам k -угольника, не пересекала более двух k -угольников со стороной один. Каково минимальное значение S ?