Темы (задачи) для научных исследований по МАТЕМАТИКЕ

Примечания. 1) В списке тем могут дополнения и изменения.

2) Среди тем есть ***как очень сложные*** (с идеей реального продолжения и подготовки работ на Республиканские и Международные конференции и конкурсы, а также с последующей публикацией в научных изданиях), так и относительно простые (особенно для начала процесса исследования) – часто рядом с такими темами (задачами) или после условия стоит специальное примечание. Последнее, однако, не означает, что такая задача является в чем-то ущербной – при соответствующем погружении в задачу и получении определенных результатов любая задача превратится в достойную тему для представления на любом уровне!

В любом случае, если кто-то из руководителей предлагает некоторую тему для исследования, значит, он видит в ней определенный смысл и интерес в развитии и получении результатов!!!

3) Участники школы могут продолжать исследования по темам, ранее разрабатываемым в своих учебных заведениях. ***Для этого в первые два дня работы необходимо заявить свою тему одному из ответственных за научные семинары по математике*** (Задворный Б.В., Змейков Д.Ю., Калинчук В.Н., Лавринович Л.И., Чурбанов Ю.Д.) и согласовать порядок работы с научным руководителем.

4) В качестве тем для исследования можно выбирать темы (исследовательские задания) из других источников, в частности, из списка заданий проблемного (научного) семинара по математике, заданий турниров юных математиков – от Минского городского (5-7 классы), республиканского (см. на сайте www.uni.bsu.by), международного (www.itym.org) и т.п.

Задворный Б.В. и другие

1. Карлсон и варенье (РТЮМ-2015)

I. а) У Карлсона есть 27 банок с вареньем. В банках находится 1, 2, 3, …, 27 литров варенья соответственно. На завтрак Карлсон может съесть одно и то же целое число литров варенья из любых двух банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье. Может ли Карлсон съесть все варенье, если вначале было 29 банок, в которых содержалось 1, 2, …, 29 литров варенья?

б) Попробуйте указать все натуральные значения n, при которых Карлсон может съесть варенье из n банок, в которых содержатся 1, 2, 3, …, n литров варенья. При этом если при каких-то n он может это сделать, опишите алгоритм «съедания», а при остальных докажите, что такое невозможно. В первом случаем при каждом n постарайтесь найти минимально возможное количество завтраков («съеданий»), за которое Карлсон может съесть варенье.

в) Попробуйте доказать, что алгоритм «съедания», предложенный вами в предыдущем пункте является оптимальным с точки зрения минимальности количества операций (под одной *операцией* будем понимать одно «съедание» по одинаковому числу литров из двух банок, при этом в разных операциях общее число литров варенья, естественно, может быть различным).

II. Попробуйте рассмотреть следующие обобщения той задачи.

1) У Карлсона есть $n = m+1$ банок с вареньем. В банках находится s, $s+1$, $s+2$, …, $s+m$ литров варенья соответственно. Операция та же, что и в части **I** задачи. Рассмотрите и попробуйте решить пункты, аналогичные пунктам **I.б)** и **I.в).** Рекомендуем начать решение с некоторых небольших значений m.

2) Пусть теперь у Карлсона n банок, в которых находится $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$ литров варенья (все значения – натуральные числа). Попробуйте решить пункты, аналогичные пунктам **I.б)** и **I.в).** Рекомендуем начать решение с небольших значений n.

III. Для обобщения предыдущих пунктов рассмотрите следующие направления:

1) Карлсон может съесть одинаковое целое количество литров из любых трех банок.

2) Карлсон необязательно съедает все варенье, т.е. он может оставить некоторое минимальное количество «несъеденного» варенья (в частях **I** и **II**, конечно, это не более одного литра).

IV. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

2. Задача аптекаря. («*можно начинать с 7-8 класса*»)

1. Исходная постановка. У аптекаря есть набор гирек с весами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г,..., n г (всего n штук). При каких n их можно ли их разложить их на 3 равные по весу кучки и как это сделать.

2. Общая постановка.

2.1. У аптекаря есть набор гирек с весами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г,..., n г (всего n штук). При каких n их можно ли их разложить их на K равных по весу кучек и как это сделать (K – некоторое натуральное число).

2.2. У аптекаря есть набор гирек с весами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г,..., n г (всего n штук). При каких n их можно ли их разложить их на K равных по весу кучек так, чтобы остались гирьки общей массой ровно L г, и как это сделать (K – некоторое натуральное число, L – заданное натуральное число).

3. Задача о количестве острых и тупых углов (*начиная с 8 класса*).

Чему равно наибольшее число острых углов в плоском (несамопересекающемся) n-угольнике? А чему может быть равно наименьшее число тупых углов? Примечания. Для второго вопроса возможно рассмотрение двух случаев: а) величина тупого угла лежит в интервале $(90^\circ;180^\circ)$, б) величина тупого угла лежит в интервале $(90^\circ; 360^\circ)$. Изменятся ли ответы во всех случаях, если вместе с острыми или соответственно тупыми углами рассматривать прямые углы?

А если на величины углов наложить какие-нибудь другие ограничения (предложите их сами)? А если n-угольник самопересекающийся?

Предложите свои вопросы для исследования в этой задаче и изучите их.

4. Суммы углов самопересекающихся многоугольников (*начиная с 8 класса*).

Для начала несколько определений. *Самопересекающийся* многоугольник – замкнутая ломаная линия, звенья которой могут пересекать друг друга. В противном случае многоугольник будет называться самонепересекающимся. Точки пересечения сторон многоугольника (или точки самопересечения) не являются его вершинами. Углами будем считать углы при вершинах многоугольника.

Сумму углов самопересекающегося многоугольника можно корректно определить, только для ориентированного многоугольника. Более точно: если каждой стороне многоугольника задать направление, т.е. указать, какую из двух определяющих ее вершин мы будем считать ее началом, а какую – концом, и притом так, чтобы начало каждой стороны было концом предыдущей, то получится *замкнутый многоугольный путь*, или *ориентированный многоугольник*.

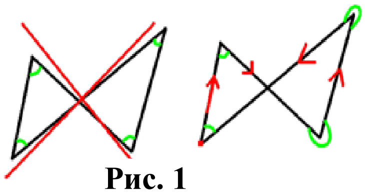


Рис. 1

В этом случае под его углом будем понимать угол между соседними сторонами, взятый с одной стороны (например, справа) относительно выбранного направления (см. рис. 1). Таким образом, сумму углов самопересекающегося многоугольника можно посчитать двояко («справа» относительно выбранного направления или «слева»).

Рассмотрите задачу нахождения сумм углов самопересекающихся многоугольников в двух основных направлениях.

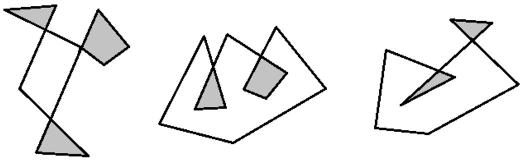
Направление 1. *Определение* 1. Назовем точку самопересечения многоугольника *простой*, если часть многоугольного пути, определенного последовательными звеньями многоугольника, начинающаяся и заканчивающейся в этой точке, не имеет других точек самопересечения. Указанную часть многоугольного пути назовем *петлей* самопересекающегося многоугольника.

Петли могут быть двух видов: внешние и внутренние (см. на рис. 2).

Определение 2. Самопересекающийся многоугольник назовем *многоугольником с петлями*, если он состоит из основной части (*основного многоугольника*) и нескольких петель. Основной многоугольник получается из самопересекающегося многоугольника с петлями отбрасыванием всех петель (отсечением петель в соответствующей точке самопересечения).

Для определенности выбор направления ориентированного многоугольника и углов будем далее осуществлять таким образом, чтобы в сумме углов учитывались внутренние углы основного многоугольника.

Рис. 2.



Задачи: 1.1) Найдите сумму углов самопересекающегося четырехугольника.

1.2) Найдите сумму углов самопересекающегося пятиугольника: а) с одной внешней петлей; б) с одной внутренней петлей.

1.3) Найдите сумму углов самопересекающегося n-угольника: а) с одной внешней петлей (двумя, тремя, … внешними петлями); б) с одной внутренней петлей (двумя, тремя, … внутренними петлями); в) <u>с m внутренними и k внешними петлями</u>.

1.4) Предложите свои задачи и обобщения в этом направлении и исследуйте их.

<u>**Направление 2.**</u> <u>*Определение* 3.</u> Назовем самопересекающийся многоугольник *правильным звездчатым*, если всего его стороны равны и каждая следующая повернута в одном и том же направлении, на один и тот же угол по отношению к предыдущей.

<u>*Свойство* 1.</u> Все вершины правильного звездчатого многоугольника лежат на одной окружности (окружности, описанной около него; <u>*попробуйте это доказать*</u>!).

Существуют различные виды правильных звездчатых многоугольников даже с одинаковым количеством вершин (сторон). Будем обозначать их S(n, k), где n – число вершин (сторон) звездчатого многоугольника, k – через сколько вершин, расположенных на описанной окружности, находятся две его смежные вершины (т.е. соединенные одной стороной), если считать одну из этих смежных, $k < n/2$.

Рис. 3

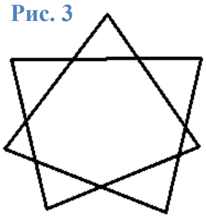
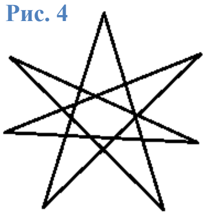


Рис. 4



Например, для звездчатого семиугольника есть два различных вида: S(7, 2) и S(7, 3) (см. рис. 3 и 4).

<u>**Задачи**</u>**:** 2.1) Найдите сумму углов звездчатого пятиугольника.

2.2) Найдите сумму углов звездчатых семиугольников S(7, 2) и S(7, 3).

2.3) <u>*Исследуйте общий вопрос*</u>: для каких n и k существуют правильные звездчатые многоугольники вида S(n, k). Найдите суммы углов таких многоугольников. (Для начала попробуйте рассмотреть хотя бы некоторые частные случаи.)

2.4) Предложите свои обобщения в этом направлении и исследуйте их.

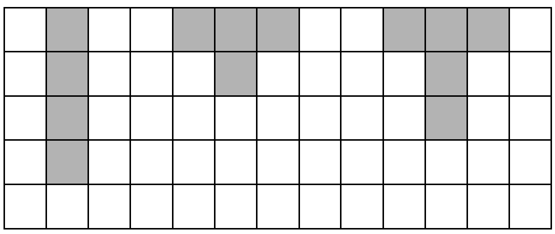
<u>*Предложите свои направления исследования этой задачи и изучите их.*</u>

5. Размещение тетрамино и пентамино (задача 1-го М/нТЮМ, 2009)

0. *На самом деле начните не с тетрамино и пентамино, а с прямоугольников и уголков из трех клеток. Остальной согласно условию*!

А. Для данного прямоугольника $m \times n$ найти число T(m, n) непересекающихся тетрамино разного вида (или пентамино, см. рис.), которые можно разместить (вдоль линий прямоугольника) так, чтобы не было свободного места для размещения ни одной дополнительной фигуры.

Рассмотрите задачу отдельно для каждой из следующих фигур:



и другие.

Б. Два игрока играют на доске прямоугольной формы размером $m \times n$, расставляя по очереди тетрамино (пентамино как в пункте А). Проигрывает тот, у которого нет хода. Исследуйте эту игру: кто выигрывает на конкретных досках, какой стратегии он должен придерживаться и т.п.

<u>Или по другому:</u>

A. Задача о неплотной расстановке пентамино

а) На клетчатой доске 6×6 вдоль линий клеток расставляются фигурки вида буквы Т (см. рис.) так, чтобы они не накладывались друг на друга (касаться углами или сторонами фигурки могут, а также их можно поворачивать на 90°, 180° или 270°). Расстановку фигурок назовем плохой, если на доску нельзя поставить никакой новой фигурки без нарушения указанных условий. Каким наименьшим количеством фигурок можно добиться плохой их расстановки?

б) Каким наименьшим количеством фигурок вы сможете добиться плохой их расстановки на доске 7×7.

в) Исследуйте общую задачу о максимально неплотной расстановке фигурок типа «пентамино» на прямоугольных досках $m \times n$ (оцените количественные характеристики таких упаковок, возможные методы и алгоритмы упаковок и т.п.).

г) Два игрока играют на доске $m \times n$ по следующим правилам: каждый из них по очереди выставляет, если возможно на доску пентамино. Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или его соперник? Исследуйте игру при различных занчениях m и n.

д) Предложите свои направления или обобщения в этой задачи и исследуйте их.

Ответы для первых двух пунктов: а) Тремя фигурами. б) Тремя фигурами.

6. Специальная делимость (*по мотивам из заданий ТЮМ 5-7 классов*)

Начнем с классики:

1. Доказать, что найдётся число вида 1111…11100000…0000, делящееся нацелона 2014.
2. Доказать, что найдётся число, записываемое одними единицами, кратное 2013.
3. Найдется ли такое натуральное число, заканчивающееся на цифры 2021и кратное 2020?
4. Найдется ли такое натуральное число, заканчивающееся на цифры 2020 и кратное 2021?
5. Можно ли найти такую натуральную степень числа 3, которая оканчивается на …0001?

Попробуем обобщить:

6. Пусть P и Q – произвольные простые числа.
   6.1. Найдется ли такое натуральное число, заканчивающееся на Q и кратное P?
   6.2. Если да, то попробуйте найти наименьшее такое число.
   6.3. Попробуйте найти все числа, удовлетворяющие условию пункта 6.1.
7. Пусть A и B – произвольные натуральные числа.
   7.1. Для каких A и B найдется ли такое натуральное число, заканчивающееся на Bи кратное A?
   7.2. Для тех чисел A и B, для которых ответ пункта 7.1 положительный найдите наименьшее такое число.
   7.3. Попробуйте найти все числа, удовлетворяющие условию пункта 7.1.
8. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.Одно из возможных направлений в п. 6 и 7 рассмотреть возможность построения

чисел, дающих при делении на P и Aсоответственно заданный остаток R. Некоторые новые направления могут быть могут быть придуманы исходя из пунктов 1, 2 и 5 начальной формулировки.

7. Общая задача о переливаниях *(можно начинать с 7-8 класса, но в перспективе – очень сложная задача !!!)*

I. Незамкнутая система сосудов

I.1) *Исходная задача.* (Источник – Математический фольклор). Имеются два сосуда, объемом в 3 и 5 литров. Как получить с их помощью ровно 4 литра воды?

Примечание. Во всех пунктах задачи сосуды имеют неправильную форму, т.е. нельзя наливать или переливать «на глазок», имеется возможности наполнять сосуды из внешнего источника, переливать воду из сосуда в сосуд до края (т.е. до указанного максимального объема каждого сосуда) и выливать воду в раковину (т.е. имеется некий сток). Такие задачи будем называть задачами на переливание в *незамкнутой системе* сосудов.

I.2) Решите подобные задачи для сосудов 5 и 7 литров, 4 и 6 литров, при этом укажите алгоритм, с помощью которого можно получить все возможные объемы воды. Обоснуйте, почему некоторые из объемов не получаются.

I.3) *Общая постановка задачи*: Имеются два сосуда с объемами A и B литров, A, B – натуральные числа. Для каких натуральных значений C имеется возможность с помощью этих сосудов получить ровно C литров воды. Укажите множество возможных значений C и алгоритм получения этих значений.

I.4) Исследуйте такую же задачу для трех сосудов с объемами A, B и C ($A < B < C$), в которой требуется получить ровно D литров воды. Укажите множество всех возможных значений D и способы (алгоритмы) их получения.

I.5) Рассмотрите вопросы предыдущих пунктов для n сосудов.

I.6) Попробуйте исследовать различные подходы к решению этих задач на оптимальность, другими словами, попробуйте найти и обосновать самый короткий по числу переливаний алгоритм получения различных объемов воды. Начните изучение этого пункта со случая двух сосудов: в частности, попробуйте получить общую формулу числа требуемых операций (т.е. переливаний) в зависимости от A, B и C?

II. Замкнутая система сосудов

II. 1) Исследуйте аналогичную задачу для трех сосудов с объемами A, B и C ($A < B < C$), с той разницей, что в условиях переливания *нет источника и стока*, но самый большой по объему сосуд, полностью заполнен водой. Такие задачи будем называть задачами на переливание в *замкнутой системе* сосудов.

II. 2) Рассмотрите различные варианты задачи для n сосудов в случае замкнутой системы (предложите соответствующие определения и варианты самостоятельно).

III. Исследуйте другие (сопутствующие) вопросы в этих задачах, а также предложите свои обобщения или направления и изучите их.

9.A. Откладываем и измеряем отрезки

1. Имеется линейка длиной 9 см без делений. Какое наименьшее число промежуточных делений нужно нанести на линейку, чтобы можно было отложить или измерить любой отрезок длиной 1 см, 2 см, 3 см, … или 9 см, прикладывая линейку лишь один раз (в каждом случае)? Ответ объясните.
2. Имеется линейка длиной 13 см без делений. Какое наименьшее число промежуточных делений нужно нанести на линейку, чтобы можно было отложить все отрезки длиной 1 см, 2 см, 3 см, …, 10 см, 11 см, 12, 13 см, прикладывая линейку лишь один раз (в каждом случае)?
3. Исследуйте задачу, подобную пунктам 1 и 2, для линеек с другими длинами.
4. **А)** Имеется веревочка длиной 9 см. На ней можно завязать маленькие узелки на определенных расстояниях от краев, для того, чтобы с помощью такой веревочки можно было измерять расстояния (например, если завязать узелок на расстоянии 1 см от левого края, то можно измерить отрезок, равный 8 см). Каждый завязанный узелок не меняет длины веревочки. Какое наименьшее число узелков требуется завязать, чтобы можно было измерить все расстояния длиной 1 см, 2 см, 3 см, …, 9 см, прикладывая веревочку лишь один раз? (Разрешается сгибать веревочку, но только один раз и в том месте, где завязан узелок)?

   Б) Рассмотрим задачу, аналогичную пункту **А)** с веревочкой длиной 13 см, причем отмерить нужно все расстояния, равные 1 см, 2 см, …, 13 см. Вновь прикладывать веревочку можно лишь один раз, но сгибать ее на этот раз можно не более одного раза в любом месте веревочки.
5. Исследуйте задачу, подобную пунктам 4. А) и Б) для веревочек с другими длинами.
6. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их

из заданий 9-го Минского городского открытого Турнира юных математиков (младшая лига – 5-7 классы) 16-19 марта 2022 года

№ 8. Близкие числа

Для произвольного натурального числа A обозначим через S(A) сумму всех делителей этого числа, считая 1 и само число. Назовем два числа A и B «*n*-близкими», если модуль разности $|S(A) - S(B)| = n$. Такое значение n будем называть степенью близости чисел A и B.

1) Найдите все «1–близкие» числа с числом 2.

2) Найдите все «2–близкие» числа с числом 3.

3) Определите степень близости чисел 2^n и 2^{n+1}, где $n \in N$?

4) Могут ли числа вида $A = p_1^k$ и $B = p_1^n$ быть «1-близкими», «2-близкими», «4-близкими», где p_1 – простое число и $k \neq n$?

5) Рассмотрим число 2^n при некотором фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Какие числа вида $3^b, b \in \mathbb{N}$, могут быть «1-близкими», «2– близкими» с этим числом?

6) Рассмотрим число 3^n при некотором фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Какие числа вида $2^b, b \in \mathbb{N}$, могут быть «1-близкими», «2-близкими» с этим числом?

7) Определите наименьшую возможную «близость» среди чисел вида А=$p_1 p_2^2$ и В=$p_2 p_1^2$, где p_1, p_2– простые числа.

6) Как Вы можете обобщить предыдущие пункты? Предложите свои направления обобщений и исследуйте их.

№ 9. Фигурки на сетке

Будем рисовать на клетчатой бумаге фигурки, состоящие из клеток нарисованной на бумаге сетки. Длину стороны каждой клетки будем считать равной 1.

Исходная задача.

1) Нарисуйте фигуру, состоящую из десяти клеток 1×1, периметр которой равен 18. Сколько таких фигур вы сможете нарисовать? (Фигурки не обязательно должны быть выпуклами и даже связными, т.е. могут состоять из двух или более многоугольников. Однако фигуры, получающиеся друг из друга поворотами или симметриями, будем считать один раз.)
2) Какой наибольший (наименьший) периметр может иметь фигурка, состоящая из 10 клеток?
3) Какое наименьшее (наибольшее) число клеток может понадобиться, чтобы нарисовать фигурку с периметром 10.
4) Во всех этих пунктах (а также последующих пунктах этой задачи), кроме вопросов существования или минимальности (максимальности), интерес представляют количественные данные, т.е. сколько имеется фигурок, удовлетворяющих заданным условиям. Другими словами, исследуйте количество возможных фигур, удовлетворяющих условиям из различных пунктов.

Возможные обобщения:

А. Увеличьте число клеток и рассмотрите различные варианты пунктов из исходной задачи.

Б. Сформулируйте аналогичные задачи для несвязных фигур (т.е. рассматриваемых как объединение нескольких многоугольников) и исследуйте пункты 1-4 в этом случае.

В. Рассмотрите задачу на бумаге с сеткой другого вида (например, состоящей из равносторонних треугольников).

Г. Изучите возможность использования результатов задачи в упаковках, укладках, в дизайнерских целях и т.п.

Д. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 10. Разные «средние»

1. В магазин завезли 20 кг сыра, за ним выстроилась очередь. Отпустив сыр очередному покупателю, продавщица безошибочно подсчитывает средний вес покупки по всему проданному сыру и сообщает, на сколько человек хватит оставшегося сыра, если все будут покупать именно по этому среднему весу. Могла ли продавщица после каждого из первых 10 покупателей сообщать, что сыра хватит еще ровно на 10 человек?

Если да, то сколько сыра осталось в магазине после первых 10 покупателей? (Средний вес покупки – это общий вес проданного сыра, деленный на число купивших.)

1.1. Тот же вопрос для случая, когда сыра 100 кг, а продавщица сообщает, что сыра хватит ровно на M человек после каждого из первых K покупателей. Определите, для каких пар натуральных чисел (K, M) такое возможно.

1.2. Тот же вопрос, что и в пункте 1.1, с одним дополнительным условием: с того момента, когда сыра остается менее 10% от первоначально завезенного в магазин, норма отпуска сыра на каждого покупателя уменьшается вдвое, т.е. после этого момента каждый покупатель может взять половину сыра от среднего количества сыра, взятого всеми покупателями, рассчитанного до него.

2. Автобус, едущий по маршруту длиной 100 км, снабжен компьютером, показывающим прогноз времени, остающегося до прибытия в конечный пункт. Это время рассчитывается исходя из предположения, что средняя скорость автобуса на оставшемся участке маршрута будет такой же, как и на уже пройденной его части. Спустя 40 минут после начала движения ожидаемое время до прибытия составляло 1 час и оставалось таким же еще в течение пяти часов. Могло ли такое быть? Если да, то сколько километров проехал автобус к окончанию этих пяти часов? (Средняя скорость автобуса на участке маршрута – это длина участка, деленная на время, за которое этот участок пройден.).

2.1. Исследуйте вопросы этого пункта в случае, когда начальный расчет ожидаемого времени (1 час) до прибытия сделан не через 40 мин., а через K минут, и сохранялся таким еще в течение L часов.

3. При подведении итогов учебного года выяснилось, что в любой группе из не менее чем $k = 5$ учеников $m = 80$ процентов десяток, полученных этими учениками в течение года, поставлены не более чем $p = 20$ процентам учеников из этой группы. Докажите, что по крайней мере три четверти всех десяток получил один ученик.

3.1. Исследуйте вопрос пункта 3 для других значений k, m и p.

4. Рассмотрите другие обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 11. Циферки

Во всех пунктах задачи надо будет придумать натуральное число, десятичная запись которого содержит каждую цифру от 0 до 9 одно и то же число раз (то есть количество 0 в десятичной записи числа равно количеству 1, равно количеству 2, и т. д.).

1. Запишите наименьшее такое число, кратное 10.

2. Запишите наименьшее число, кратное 7.

3. Запишите число, кратное 2024. Сможете ли вы записать наименьшее число кратное 2024?

4. Для любого простого p укажите алгоритм, как записать число кратное p. Придумайте алгоритм, как записать наименьшее число кратное p.

5. Исследуйте задачи пункта 4 для произвольного натурального числа N.

6. Предложите свои обобщения или направления исследований в этой задаче и изучите их. (Одним из обобщений может быть исследование такой задачи в других системах счисления. Другим направлением может быть описание множества всех чисел, удовлетворяющих каким-то пунктам этой задачи. *Может Вы предложите другие – более интересные обобщения*.)

№ 12. Уравнение в целых числах

1. Определите натуральное значение n так, чтобы уравнение $x^2 - y^2 = 2^n$ имело ровно 2022 решения в натуральных числах.
2. Найдите натуральное значение n такое, что уравнение $x^2 - y^2 = 36^n$ имеет а) 49, б) 199, в) 2047 решений в натуральных числах.
3. Докажите, что для любого натурального значения n уравнение $x^2 - y^2 = 2017^n$ имеет больше решений в натуральных числах, чем уравнение $x^2 - y^2 = 2^n$.
4. Докажите, что для любого натурального значения n уравнение $x^2 - y^2 = 2017^{4n}$ имеет меньше решений в натуральных числах, чем уравнение $x^2 - y^2 = 72^n$.
5. Определите натуральное значение n такое, что уравнения $x^2 - y^2 = 20\,000$ и $x^2 - y^2 = 4^n$ имеют одинаковое количество решений в натуральных числах.
6. Определите наименьшее натуральное значение n для которого уравнение $x^2 - y^2 = n$ имеет ровно 11 решений в натуральных числах.
7. Сколько существует натуральных значений n, меньших 1 000 000 таких, что уравнение $x^2 - y^2 = n$ имеет ровно 3 решения в натуральных числах?
8. Пусть $F(m)$ — количество решений уравнения $x^2 - y^2 = m$ в натуральных числах. Предложите оценку или дайте точное значение для а) $F(2^k)$, б) $F(3^k)$, в) $F(2^{k_1}3^{k_2})$, г) $F(N)$, где k, k_1, k_2, N — натуральные числа.
9. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 13. Детская комбинаторика и расстояния

Везде в этой задаче предлагается рассмаривать расположение объектов (остановок, деревьев, точек и т.п.) в различных возможных порядках, не обязательно именно в том, в котором, может быть, они были указаны в начале. При этом величиной остановок, толщиной деревьев можно пренебрегать, т.е. считать их точками на числовой прямой

1. На прямой дороге расположены четыре остановки: A, B, C и D. Известно, что расстояние между остановками A и D равно 1 км, между B и C – 2 км, между B и D – 3 км, между A и B – 4 км, между C и D – 5 км. Чему равно расстояние между остановками A и C?

2. Вдоль аллеи растут четыре дерева. Попарные расстояния между некоторыми из них равны 63, 14 и 84 метра (известно, что в эти пары входят все 4 дерева, но в

каком порядке – неизвестно). Сколько деревьев надо еще посадить, чтобы расстояние между любыми двумя соседними деревьями было одинаковым?

2.1. Тот же вопрос, что и в пункте 2, но в случае расстояний между деревьями выраженными через целочисленные параметры a, b, c.

Рассмотрите этот пункт в различных аспектах:

А. Расстояния между деревьями должны быть целочисленными.

Б. Расстояния между деревьями могут быть дробными вида $1/p$, где p – некоторое натуральное число.

3. Отметьте на прямой четыре точки.

А. Сколько различных (по длине) отрезков могут задавать эти точки? Укажите все варианты.

Б. Будем считать полученные расстояния, равные длинам отрезков из подпункта 3.А «эталонными» линейками (без делений). Пусть имеется сколько угодно палочек, равных по длине эталонным отрезками. Какие растояния можно отмерить такими палочками.

3.1. Ответьте на вопрос пункта 3, если точек 5 (или более).

4. Предложите свои обобщения в этой задаче и изучите их.

№ 14. Наложение

Во всех пунктах этой задачи под словами «наложите фигуры» (и т.п.) будем понимать задачу нарисовать (расположить) на бумаге указанные фигуры так, чтобы выполнялись определенные условия.

1. Наложите (нарисуйте на бумаге) два треугольника (не обязательно равных), чтобы в пересечении фигур получился треугольник.
2. Какие многоугольники можно получит пересечением треугольников?
3. Какое наибольшее число сторон может быть у многоугольника, полученного пересечением выпуклого четырехугольника и треугольника? Ответ обоснуйте.
4. Какое наибольшее число сторон может быть у многоугольника, полученного пересечением выпуклых четырехугольника и пятиугольника? Ответ обоснуйте.
5. Какое наибольшее число сторон может быть у многоугольника, полученного пересечением выпуклых m-угольника и n-угольника? Ответ обоснуйте.
6. Если во всех предыдущих пунктах разрезать бумагу по сторонам многоугольников, то сколько получится кусочков бумаги? (Внешнюю часть многоугольников не считать.)
7. А если в некоторых пунктах задачи рассматривать невыпуклын фигуры (например, невыпуклые четырехугольники). Как изменятся ответы в этих пунктах?
8. Предложите свои обобщения в этой задаче и изучите их.

Задача 15. Задача о дружбах, рукопожатиях и улыбках (*из ТЮМ 5-7 классов*)

1) *Исходная задача.* В седьмом классе некоторой школы каждый мальчик дружит с 5-ю девочками и 6-ю мальчиками, а каждая девочка дружит с 6-ю мальчиками и 5-ю девочками. А) Сколько школьников учится в этом классе, если известно, что их не более тридцати? Б) А если их не более 35?

2) Перед началом уроков классный руководитель заметил, что каждый учащийся его класса поздоровался за руку с шестью девочками и восемью мальчиками. При этом количество рукопожатий между мальчиками и девочками было на пять меньше числа остальных рукопожатий. Сколько учеников в классе?

3) На олимпиаду по математике прибыло несколько учащихся 8 класса. Некоторые из них оказались уже знакомыми. При встрече Маша улыбнулась своему знакомому Саше, а Коля улыбнулся незнакомой ему девочке Оле. И вообще, каждая восьмиклассница улыбнулась каждому знакомому ей восьмикласснику, а каждый восьмиклассник улыбнулся незнакомой ему восьмикласснице. В результате было зафиксировано 155 улыбок. Сколько всего учащихся 8 класса участвовало в олимпиаде?

4) *Общая постановка*. Исследуйте задачи 1) – 3) при различных значениях параметров (числа дружб, рукопожатий, улыбок и проч.), или более подробно:

А) пусть в первом пункте каждый учащийся дружит с M мальчиками и N девочками, изучите возможные количества детей в классе (школе и т.п.), а также когда подобные ситуации невозможны;

Б) в пункте 2) помимо условий, указанных в обобщении А, рассмотрите различные значения разностей между рукопожатиями различных групп детей,

В) во всех пунктах и условиях предложите свои значения параметров (или задайте другие – свои параметры) и изучите разрешимость задач в этих случаях.

5) Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 16. Вокруг теоремы Пика

Пусть на плоскости введена сетка (можно говорить, что сетку образуют прямые $x = i$, $y = j$, где $i, j \in \mathbb{Z}$; точки пересечения данных прямых будем называть узлом сетки). *Клетчатым многоугольником* будем называть многоугольник без дырок, все вершины которого расположены в узлах сетки. Для вычисления площадей клетчатых многоугольников существует формула Пика:

$$S = I + \frac{B}{2} - 1,$$

где I — количество узлов внутри многоугольника, B — количество узлов, лежащих на сторонах многоугольника.

Рассмотрим куб, на гранях которого введена сетка. Верна ли, что для клетчатых многоугольников, расположенных на гранях куба (многоугольник не обязан располагаться на одной грани куба!) формула Пика? Если не верна, то предложите аналогичную формулу для таких многоугольников. Рассмотрите так же и более сложные поверхности: например, рассмотрите фигуру, которая получается вырезанием из куба прямоугольного параллелепипеда меньших размеров.

Или по другому: Обобщение формулы Пика

Пусть F − многоугольник (не обязательно выпуклый) на плоскости с целочисленными вершинами (то есть обе координаты каждой вершины являются целыми числами).

Обозначим через $N(F)$ количество целочисленных точек, расположенных внутри фигуры F, $B(F)-$ количество целочисленных точек на границе F и наконец $\overline{N}(F)=N(F)+B(F)$ − количество точек на границе или внутри F. Известна формула Пика, которая вычисляет площадь $S(F)$:

$$S(F)=N(F)+B(F)/2-1.$$

Целью этой задачи является обобщение этой формулы на многомерный случай. Во всех пунктах задачи интересно получить соответствующие формулы в частных случаях (например, для фигур определенного вида: прямоугольных треугольников или тетраэдров, ромбов или прямоугольных параллелепипедов и т.п.).

0. Докажите формулу Пика.

1. Покажите, что формула Пика не допускает прямого обобщения на трехмерный случай, то есть объем $V(F)$ многогранника F с целочисленными вершинами не может быть выражен через числа $N(F)$ и $B(F)$ целочисленных точек внутри и на границе многогранника.

Указание. Рассмотрите тетраэдр с координатами $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,m)$.

Для любого натурального числа k обозначим через kF фигуру, которая получается из F гомотетией с коэффициентом k и центром в начале координат. Определим функции $p(k)=N(kF)$, $\overline{p}(k)=\overline{N}(kF)$.

2. Пусть F − многоугольник с целочисленными вершинами.

(а) Докажите, что $\overline{p}(k)$ является квадратным полиномом от k, то есть $\overline{p}(k)=p_2k^2+p_1k+p_0$ для любого натурального числа k, причем $p_2=S(F)$, $p_1=B(F)/2$, $p_0=1$.

(б) Докажите, что $p(k)=\overline{p}(-k)$.

В пунктах 3-5 фигура F является многогранником в трехмерном пространстве с целочисленными координатами.

3. Вычислите полиномы $p(k)$ и $\overline{p}(k)$ для следующих многогранников F:

(a) куб с вершинами в точках (x_1,x_2,x_3), $x_i=0$ или $x_i=1$, $i=1,2,3$;

(b) тетраэдр с вершинами в точках $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$;

(c) октаэдр с вершинами в точках $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$, $(0,0,\pm1)$;

(d) тетраэдр из указания к пункту 1.

(e) прямоугольная призма высотой 1, основанием которой является многоугольник с целочисленными координатами.

4. Докажите, что $\overline{p}(k)$ является кубическим полиномом по k, старший коэффициент которого равен объему $V(F)$. Какой геометрический смысл имеют остальные коэффициенты этого полинома?

5. Докажите, что $p(k)=-\overline{p}(-k)$.

6. Найдите полиномы $p(k)$ и $\overline{p}(k)$ для n-мерных аналогов куба, тетраэдра и октаэдра из пунктов 3a-3c.

7. Попробуйте обобщить пункты 4 и 5 на многомерный случай.

8. Предложите свои обобщения или направления исследования и изучите их (возможно, например, рассмотрение подобных вопросов для фигур расположенных на плоскости, покрытой треугольной решеткой, и т.п.).

Литература. А. Кушниренко, Целые точки в многоугольниках и многогранниках, Квант, N4, 1977, С.13-20.

17. Уравняем кучки (*по мотивам из заданий ТЮМ 5-7 классов*)

Две исходные задачи:

1.0) В трех кучках находится 22, 14 и 12 орехов. Требуется путём трёх перекладываний из одной (какой-то) кучки в некоторую другую уравнять число орехов в этих кучках, соблюдая при этом условие: из любой кучки разрешается перекладывать в другую кучку лишь столько орехов, сколько орехов в той кучке уже имеется.

2.0) У трех мальчиков (у Пети, Вани и Толи) есть по кучке фантиков. Общее число фантиков 120. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было (каждому из них столько, сколько у того было). Затем Ваня дал Пете и Толе столько, сколько у них стало после первого перекладывания. И наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому моменту имелось (т.е. после второго перекладывания). В результате всем досталось поровну. Сколько фантиков было у каждого в начале?

Более общие задачи:

1) В трех кучках находится $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ орехов. Требуется путём нескольких перекладывании уравнять число орехов в этих кучках, соблюдая при этом условие: из любой (какой-то) кучки разрешается перекладывать в другую кучку лишь столько орехов, сколько в той их уже имеется. При каких значениях натуральных чисел $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ это возможно сделать. (Важно не только дать ответ, при каких значениях $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ можно, а при каких – нельзя, но и обосновать почему, в случае «можно» полезно описать алгоритм перекладываний).

2) Исследуйте задачу 2.0 для произвольного исходного числа N фантиков, а именно, при каких N мальчики могут поделить фантики поровну, а при каких – нет (ответ может зависеть от общего числа передачи фантиков от одного мальчика другим, а также от порядка передачи).

Еще одна задача:

3) В трех кучках находится $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ орехов. При тех же условиях перекладываний как в задаче 1 требуется опустошить одну из кучек. Попробуйте дать ответ на вопрос, при каких $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ это можно сделать и как? (Важно не только дать ответ, при каких значениях $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ можно, а при каких – нельзя, но и обосновать почему, в случае «можно» важно описать алгоритм перекладываний).

4) Попробуйте обобщить задачи 1) – 3) на несколько кучек (более трех, хотя бы в каких-то частных случаях).

6) Предложите свои обобщения в этой задаче и исследуйте их.

Лавринович Л.И.

1. **Отношение порядка на различный полях.**
Определение. На поле F задано отношение порядка, если выделено множество $P \subset F$ (назовем это множество множеством положительных чисел), удовлетворяющее условиям
a. Для любого x верно ровно одно из утверждений: $x \in P$, $x = 0$, $-x \in P$.
b. Если $x, y \in P$, то $x + y \in P$, $xy \in P$.
Будем говорить, что $a > b$, если $a - b \in P$.
1. Докажите, что на R отношение порядка задано однозначно.
2. Докажите, что на C отношение порядка задать нельзя.
3. Докажите, что на множестве $Q\left(\sqrt{2}\right)$ отношение порядка можно задать ровно двумя способами.
4. Рассмотрите другие поля. (8-10 классы)
2. **Парковка у дома.** Вдоль дома расположена парковка. Места на парковке расположены вряд и пронумерованы от 1 до *n*. Въезд на парковку с одной стороны. Движение на парковке одностороннее. Выезд с другой стороны. У каждого из жильцов дома есть любимое место. Возможно, у некоторых одно и то же. Жильцы дома по очереди заезжают на парковку. Если любимое место свободное, то они его занимают. Если нет, то едут до ближайшего свободного место и паркуются. Если свободного места нет, то уезжают искать мест для парковки в другой двор. Определите для любого ли расположения любимых мест можно определить очередность заезда на парковку, чтобы можно было припарковаться всем жильцам дома. Найдите такое расположение любимых мест, когда припаркуются минимальное число автомобилей. Рассмотрите обобщение данной задачи. (8-10 классы)
3. **ε-оптимальные многоугольники на целочисленной решетке.** Назовем правильный *n*-угольник ε-оптимальным (0<ε<0,5), если все его вершины лежат в ε-окрестности узлов целочисленной решетки, и при этом его площадь минимальна. Для каждого *n* найдите площади ε-оптимальных *n*-угольников, а также все их возможные расположения на решетке. (8-10 классы)
4. **Угадывание чисел.** Двое играют в игру: один задумывает некоторое число, второй называет *k* чисел из промежутка от 1 до *n*. Первый прибавляет к задуманному числу одно из них и говорит результат и т.д. Найти минимальное число ходов, за которое второй игрок сможет определить задуманное число. Та же задача, но первый игрок проводит другую операцию над числами (вычитает, умножает, делит, возводит в степень и т.д) (7-10 классы)

5. **Фигуры наибольшей площади.** На координатной плоскости задать множество точек наибольшей площади, удовлетворяющее условию: для любых двух точек множества площадь треугольника с вершинами в начале координат и в этой точке не превосходит α. (9-10 классы)
6. **Графики с модулем.** Известно, что графиком функции, содержащей модули от линейных выражений, является ломанная. 1. По ломанной восстановить функцию или уравнение ее задающее. 2. Определить наименьшее количество знаков модуля для задания этой ломанной. 3. Всякую ли ломанную можно задать с помощью линейного выражения с модулями. (7-10 классы)
7. **Квадраты в различных системах счисления.** Для данного числа N, записанного в десятичной системе счисления, определить существует ли такая система счисления, в которой число, записанное теми же цифрами, что и N, будет полным квадратом. Определить условия, когда не существует такой системы счисления. Если она существует, то определить единственна ли она. (7-9 классы)
8. **Крестики-нолики.** Двое играют в игру на бесконечном листе бумаги. За ход один ставит N крестиков в любом месте. Другой – M ноликов. Последующими ходами можно ставить крестики и нолики только в клетки с уже помеченными. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Исследовать выигрышные стратегии. (Квант 1971) (7-9 классы)

Горский С.М.

1. Представительные числа

1. Число 2 100 010 006 интересно тем, что его первая цифра равна количеству единиц в этом числе, вторая — количеству двоек, …, десятая — количеству нулей.

а) Существуют ли ещё числа, обладающие указанным свойством? Если да, то сколько их?

б) Докажите, что нет чисел, удовлетворяющих указанному выше свойству, с меньшим количеством цифр в своей десятичной записи.

2. Число будем называть *представительным числом типа А*, если его первая цифра равна количеству нулей в этом числе, вторая цифра — количеству единиц, третья цифра — количеству двоек и т. д. Число будем называть представительным числом типа Б, если его первая цифра равна количеству единиц в этом числе, вторая цифра — количеству двоек и т. д., но последняя цифра равна количеству нулей в десятичной записи числа.

а) Для каких n существуют представительные числа типа А и представительные числа типа Б?

б) Каких чисел больше: представительных типа А или представительных типа Б?

3. Существует ли такое девятизначное число, у которого первая цифра равна количеству НЕ единиц, вторая — количеству НЕ двоек, …, девятая — количеству НЕ девяток? Существуют ли подобные числа с меньшим количеством цифр?
4. Найдите наименьшее целое положительное число, каждая цифра которого равна количеству отличных от неё цифр этого числа. Найдите наибольшее такое число. Сколько существует таких чисел?

2. Бургеры и сэндвичи

1. Натуральное число будем называть $a_1a_2 \dots a_k$-*бургером*, если в его десятичной записи

- каждая ненулевая цифра $a_1, a_2, \dots, a_k$ используется ровно два раза;
- между двумя одинаковыми ненулевыми цифрами ровно столько нулей, сколько значение этих цифр.

Например, 40 001 041 или 300 103 100.
$a_1a_2 \dots a_k$-бургер будем называть $a_1a_2 \dots a_k$-*гамбургером*, если есть $a_1a_2 \dots a_k$-бургер, десятичная запись которого состоит m цифр, но нет $a_1a_2 \dots a_k$-бургера, десятичная запись которого состоит из n цифр, где $n < m$.
а) Сколько существует семизначных 12-бургеров?
б) Предъявите алгоритм построения a_1a_2-гамбургера.
в) Предъявите алгоритм построения $a_1a_2 \dots a_k$-гамбургера.
2. Натуральное число будем называть *сэндвичем,* если

- в его десятичной записи нет нулей;
- каждая ненулевая цифра используется два раза;
- одна цифра находится между единицами, две цифры — между двойками, три цифры — между тройками и так далее.

Например, 312132 — это числовой сэндвич, состоящий из цифр 1, 2 и 3. По аналогии такое число будем называть 123-сэндвичем.
а) Составьте 1234-сэндвич.
б) Сколько есть 1234-сэндвичей? Могут ли 1234-сэндвичи отличаться количеством цифр?
в) Для любого ли подмножества цифр a_1, a_2, …, a_k существует $a_1a_2 \dots a_k$-сэндвич?
3) *Клубный сэндвич* — это число, в котором каждая цифра встречается ровно три раза (нет нулей). Применяются те же правила, что и выше: одна цифра помещается между любыми двумя последовательными единицами, две цифры помещаются между любыми двумя последовательными двоечками и так далее.
а) Расставьте вместо * цифры так, чтобы получился клубный сэндвич из цифр от 1 до 9.

******4*3******5*2****1****

б) Для любого ли подмножества цифр a_1, a_2, …, a_k существует $a_1a_2 \dots a_k$-клубный сэндвич?

3. Ещё раз об угадывании

1. Мудрец предлагает сыграть вам в следующую игру: он загадал два натуральных числа A и B. Каждым ходом Вы можете назвать два числа a и b и получить в ответ число, равное $|A-a|+|B-b|$. Как за два хода гарантированно узнать числа мудреца?

2. Какое наименьшее количество ходов потребуется, если мудрец задумал три положительных числа: A, B и C; вы за ход называете три числа: a, b, c и получить в ответ число, равное

$$|A-a|+|B-b|+|C-c|.$$

3. Обобщите пункт 2 на случай большего количества задуманных чисел.
4. Можно ли в пункте 1 справиться за два хода, если в ответ на числа a и b мудрец называет
а) $\max(|A-a|, |B-b|)$;
б) $\frac{1}{2}\cdot\frac{|A-a|}{1+|A-a|}+\frac{1}{4}\cdot\frac{|B-b|}{1+|B-b|}$?
5. Обобщите пункт 2 на случай большего количества чисел и выражений на подобие 4а, 4б.

4. Восстановить периметр

1. В прямоугольнике провели n прямых, параллельных его длине, и m прямых параллельных его ширине. Получилось $(n+1)(m+1)$ меньших прямоугольников.
а) Какое наименьшее количество периметров меньших прямоугольников надо знать, чтобы найти периметр исходного прямоугольника?
б) Чему равно наименьшее N такое, что для каких бы меньших N прямоугольников мы не взяли, зная их периметр, мы смогли бы найти периметр исходного прямоугольника.
2. Прямоугольник разбит на M квадратов так, что нельзя провести отрезок, параллельный длине или ширине исходного прямоугольника, так что бы этот отрезок не пересекал внутренние области каких-то квадратов.
а) Какое наименьшее количество периметров квадратов надо знать, чтобы найти периметр исходного прямоугольника.
б) Тот же вопрос, но теперь прямоугольник разбит на меньшие прямоугольники аналогичным образом.
3. Существует ли такое разбиение прямоугольника на непересекающиеся многоугольники такое, что, даже зная периметры всех частей, мы не можем найти периметр исходного прямоугольника?
4. Пусть прямоугольник разбит на непересекающиеся многоугольники, для каждого из них, кроме одного, мы знаем периметр. В каком случае разбиения, мы сможем найти периметр неизвестной части?

Сергеенко С.В.

1. Монотонные многочлены над кольцом вычетов

Пусть K – некоторое натуральное число, большее 1. Через [x] обозначим множество целых чисел дающих с целым числом x одинаковый остаток при делении на K, то есть x∈**Z**}. Множество [x] называется классом вычетов по модулю K. Под суммой классов вычетов [x] и [y] будем понимать класс вычетов [x+y], а под их произведением – класс вычетов [xy]. Сумму классов вычетов будем обозначать [x]+[y], а произведение – [x][y]. Определим степень класса вычетов $[x]^n$ с целым неотрицательным показателем n следующим образом: $[x]^0=[1]$, $[x]^{n+1}=[x][x]^n$.

Будем рассматривать многочлены от n переменных над классами вычетов $P(x_1, x_2, \ldots,$

x_n), то есть суммы произведений видаа$x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}$,где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – целые неотрицательные числа, a, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – классы вычетов по модулю K, a – известные коэффициенты, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – переменные. Будем называть наибольшую из сумм

Будем считать, что [0]<[1]<…<[K–1]. Будем говорить, что упорядоченный набор (x_1, , …, x_n) предшествует упорядоченному набору ($y_1, y_2, \ldots, y_n$), если $x_1 \le y_1$, $x_2 \le y_2$, …, $x_n \le y_n$, и обозначать это так $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Запись $(x_1, x_2, \ldots, x_n) < (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ означает, что набор ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) предшествует набору ($y_1, y_2, \ldots, y_n$) и найдётся такое i, что $x_i \ne y_i$.

Будем называть многочлен от n переменных над классами вычетов P монотонным, если для любых таких двух наборов ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) и ($y_1, y_2, \ldots, y_n$), что $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le (y_1$, , …, $y_n)$, верно, что $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le P(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Покажите, что если [x]=[u] и [y]=[v], то [x+y]=[u+v] и [xy]=[uv].

Верно ли, что при K=2 для любого целого числа [x] верно, что $[x]^K=[x]$.

Решите пункт 2 при K равном некоторому простому числу.

Рассмотрите пункт 2 при произвольном натуральном K.

Перечислите все монотонные многочлены от 2 переменных над классами вычетов степени не выше 2 при K=2.

При каких значениях коэффициентов многочлен над классами вычетов от 2 переменных будет монотонным, если K=2.

Решите пункты 5 и 6 для многочленов от произвольного количества переменных.

Рассмотрите при K=3: а) пункт 5; б) пункт 6; в) пункт 7.

Рассмотрите при произвольных значения K: а) пункт 5; б) пункт 6; в) пункт 7.

Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

2. Антицепи многомерных решёток

Декартовым произведением двух непустых множеств A и B называется множество, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары (a, b) элементов исходных множеств (a∈A, b∈B). Декартово произведение множеств A и B обозначается

Бинарным отношением между множествами A и B называется любое подмножество их декартова произведения. Бинарным отношением на множества A называется любое подмножество множества A×A. Факт связи a∈A и b∈B отношением R между множествами A и B обозначается aRb.

Бинарное отношение R на множестве A называется:

- рефлексивным, если для всякого a∈A верно, что aRa;

- симметричным, если для всяких a∈A, b∈A если aRb, то bRa;

- антисимметричным, если для всяких a∈A, b∈A если aRb и bRa, то a=b;

- транзитивным, если для всяких a∈A, b∈A, c∈A если aRb и bRc, то aRc.

Отношением порядка на множестве A называется рефлексивное антисимметричное транзитивное отношение на этом множестве. Отношение частичного порядка обычно обозначают символом $\leq$.

Множество A, на котором задано отношение порядка, называется частично упорядоченным. Элементы $a \in A$, $b \in A$ называются несравнимыми, если не верно ни aRb, ни bRa. В противном случае элементы называются сравнимыми.

Цепью в частично упорядоченном множестве A называется такое его подмножество, в котором любые два элемента этого подмножества сравнимы. Антицепью в A называется такое его подмножество, в котором любые два элемента этого подмножества несравнимы.

Множество E_k^n всех упорядоченных наборов $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_j \in E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, называется k-значной n-мерной решёткой. Нормой набора $(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$ называется сумма $a_1 + \ldots + a_n$. Подмножество множества E_k^n, состоящее из всех наборов с нормой равной i, называется i-м слоем.

Зададим на k-значной n-мерной решётке отношение порядка следующим образом: для любых наборов $(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$ и $(b_1, \ldots, b_n) \in E_k^n$ тогда и только тогда верно, что $(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n)$, когда для всех $j \in \{1, \ldots, n\}$ $a_j \leq b_j$.

Найдите, какое наибольшее количество элементов модержит слой 2-значной 2-мерной решётки.

Найдите наибольшее количество элементов в антицепи 2-значной 2-мерной решётки.

Представьте 2-значную 2-мерную решётку в виде объединения наименьшего числа не пересекающихся подмножеств.

Исследуйте для 2-значной n-мерной решётки: а) пункт 1; б) пункт 2; в) пункт 3.

Исследуйте для 3-значной n-мерной решётки: а) пункт 1; б) пункт 2; в) пункт 3.

Исследуйте для k-значной n-мерной решётки: а) пункт 1; б) пункт 2; в) пункт 3.

Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Исследовательские задачи для Республиканской летней школы

Давид Юрьевич Змейков

1. Суммы последовательных чисел в перестановках

1. Найдите наибольшее число A такое, что в любой перестановке чисел $1, \ldots, 100$ существуют десять последовательно записанных чисел с суммой не меньше A.

2. Даны натуральные числа n и $k \leq n$. Найдите наибольшее число A такое, что в любой перестановке чисел $1, \ldots, n$ существуют k последовательно записанных чисел с суммой не меньше A.

2. Прямоугольные множества

1. Множество точек на плоскости назовем *прямоугольным*, если для любой его раскраски в два цвета найдется хотя бы один прямоугольный треугольник с вершинами одного и того же цвета. Определите, являются ли следующие множества прямоугольными:

a) окружность;
b) эллипс;
c) граница равностороннего треугольника;
d) граница правильного n-угольника;
e) парабола.

2. Опишите действительные функции $f(x)$, заданные на конечном или бесконечном интервале, чьи графики являются прямоугольными множествами.

3. Попробуйте классифицировать прямоугольные множества.

4. Введите также понятия *равнобедренного*, *равностороннего* и *квадратного* множества и исследуйте аналогичные вопросы.

3. Игры соединений

1. Боря нарисовал на листе бумаги n точек и стал играть следующим образом. За каждый ход он выбирает какие-то две из имеющихся точек, соединяет их кривой линией и рисует на этой линии еще одну точку. При этом всегда из каждой точки должно выходить не более трех линий и линии не должны пересекаться.

a) Докажите, что Боря не сможет играть бесконечно долго.
b) Какое число ходов он сможет сделать прежде, чем больше уже нельзя будет провести новую линию (найдите все возможные варианты)?

2. Боре стало скучно и он позвал себе в компанию Лёню. Они решили ходить по очереди, соблюдая вышеуказанные правила игры. Проигрывает тот, кто первым больше не сможет провести линию. Боря начинает.

a) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $n = 2$?
b) Найдите выигрышную стратегию для любого n.

3. А что будет если Боря пригласит играть еще и своих учеников?

4. Попробуйте обобщить задачу, а также исследовать другие направления.

4. Вложение одного треугольника в другой

Обозначим через P и Q треугольники с длинами сторонами p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 соответственно. Какие условия (необходимые и/или достаточные) нужно наложить на p_i и q_i, чтобы в треугольнике P можно было поместить треугольник Q?

5. Бинарные расстановки кругов и многоугольников

1. Имеется n кругов единичного радиуса. Их разместили в круге радиуса R, так чтобы никакая прямая не пересекала более двух кругов единичного радиуса. Каково минимальное значение R?

2. Имеется n правильных k-угольников со стороной один. Их разместили в правильном k-угольнике со стороной S так, чтобы каждый единичный k-угольник был гомотетичен исходному (коэффициент гомотетии положителен) и никакая прямая, параллельная сторонам k-угольника, не пересекала более двух k-угольников со стороной один. Каково минимальное значение S?

6. Задача о соседях

Диаметром многоугольника (необязательно выпуклого) называется наибольшее расстояние между двумя его точками.

1. Квадрат со стороной 1 разбит на несколько выпуклых многоугольников. Предположим, что диаметр каждого многоугольника не превосходит $\frac{1}{30}$. Докажите, что найдется многоугольник P, у которого имеется не менее шести *соседей*, то есть многоугольников, касающихся P по крайней мере в одной точке.

2. Задача пункта а) для общего случая, когда многоугольники разбиения необязательно выпуклы.

3. Заменим в условии пункта а) константу $\frac{1}{30}$ на положительное действительное число $\epsilon > 0$. Найдите наибольшее натуральное число $N(\epsilon)$ такое, что при любом разбиение квадрата со стороной 1 на выпуклые многоугольники диаметра $\leq \epsilon$, хотя бы у одного из многоугольников будет не менее $N(\epsilon)$ соседей.

4. Задача пункта с) для случая, когда многоугольники разбиения необязательно выпуклы.

7. Числа, кратные своему числу делителей

Обозначим через T множество натуральных чисел n, для которых $\tau(n)$ делит n, где $\tau(n)$ равно числу всех натуральных делителей числа n.

1. Докажите, что $n! \in T$ для достаточно больших n.

2. Найдите другие интересные бесконечные подмножества множества T.

3. Найдите необходимые и/или достаточные условия принадлежности натурального числа множеству T.

4. Докажите, что плотность множества T равно 0.

5. Изучите другие свойства множества T.

6. Предложите свои обобщения.

Зорин Е.А.

Задача 1 *Для любого $n \in \mathbb{N}$, обозначим $p(n)$ наименьшее количество экземпляров числа π требующихся чтобы представить n как формулу использующую только: эти экземепляры числа π, стандартные математические операции $+$, -, *, $/$, знаки взятия дробной и целой части и экспоненциирование (последнее означает что если мы можем составить формулу X и формулу Y, то мы можем составить и формулу X^Y).*

Например,

$p(3) = 1$, потому что у нас есть формула $3 = [\pi]$.

p(1)=2, потому что у нас есть формула $1 = \pi/\pi$ и можно, например, проверить прямым перебором что нет формулы содержащей только один экземпляр π, удовлетворяющей условиям выше и дающей 1.

Задача-максимум заключается в том, чтобы найти $p(n)$ как явную функцию. Реалистичная (и довольно сложная) версия – это найти $p(n)$ для некоторого количества малых n, может быть, найти $p(n)$ для каких-то бесконечных последовательностей параметра n и в каких-то еще случаях найти оценки для $p(n)$.

Задача 2 *Вначале напомним, что мультимножество – это множество элементов, в котором некоторые элементы могут повторяться, то есть иметь кратности. Например, $\{1, 2, 3, 3, 4, 7, 7, 7\}$ – это мультимножество состоящее из 8 элементов.*

Пусть нам даны $k, n \in \mathbb{N}$. В этой задаче мы будем заинтересованы в нахождении всех пар конечных мультимножеств A, B состоящих из неотрицательных целых чисел таких что

1. *Эти мультимножества не пересекаются. То есть никакое число из мультимножества A не содержится в B.*
2. *Для любого $i = 1, \ldots, k$, и используя обозначения $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, выполняется равенство*

   $$a_1^i + \cdots + a_n^i = b_1^i + \cdots + b_n^i$$

   (напомним, что по определению мультимножества может быть что $a_i = a_j$ при том что $i \neq j$, и то же самое верно для $b_1, \ldots, b_n$).

   Задача заключается в том, чтобы попробовать отыскать все такие пары мультимножеств для заданных значений k и n.

   Стоит иметь ввиду, что решить задачу для всех пар k и n чрезвычайно сложно. Очень интересно (и, вероятно, довольно сложно) было бы, например, отыскать все пары для $k = 2$, $n = 3$. Можно, например, попробовать доказать, что нет решений при $n \leq k$ и найти решения еще в каких-нибудь случаях.