Задания письменного тура

7 декабря 2010 года

Краткие пояснения к выполнению и оформлению исследований (решений):

1) **время решения 3 час. = 180 мин**.;

2) ***исследование по каждой задаче необходимо оформить в отдельной тетради*** *и подписать название команды, город, фамилию автора(ов);*

3) **на первом листе** каждой тетради сделайте резюме своего исследования соответствующей задачи – то есть

– отдельно, четко и лаконично сформулируйте основные результаты вашего исследования этой задачи;

– оформление самого решения (оформление результатов – доказательств, примеров и других элементов исследования – начинайте **со второго листа тетради**).

4) *интерес представляет как максимально возможное обобщение исходной постановки (*утверждения, обоснования, гипотезы; разрешаются импровизации с конкретными результатами*), так и ваши собственные идеи и направления.*

Задача № 1. Делимость сумм цифр последовательных натуральных чисел

1. Докажите, что среди любых 19 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 10.
2. Вообще, для каждого $m = 2, 3, \dots$ можно найти наименьшее число c_m такое, что среди любых c_m последовательных натуральных чисел хотя бы у одного сумма цифр делится на m. Легко показать, например, что $c_2 = 3$, $c_3 = 3$.
   Найдите значения: c_m для $m = 4, 5, 6, \dots 11, 12$.
3. Попробуйте найти точные значения для других значений m. Интерес представляют как отдельные значения c_m, так и общие формулы, если не для всех m, то хотя бы для каких-то множеств или последовательностей значений m.
4. Попробуйте найти оценки сверху и снизу для значений c_m (по возможности для всех m или для определенных классов значений m).
5. Предложите свои интересные направления исследования в этой задаче и по возможности исследуйте их.

Задача № 2. Делимость – 2

1. Найдите все такие натуральные числа a и b ($1<a<b$), что число $ab-1$ делится на $(a-1)(b-1)$.
2. Найдите все такие натуральные числа a и b ($2<a<b$), что число $ab-2$ делится на $(a-2)(b-2)$.
3. Найдите все такие натуральные числа a, b ($n<a<b$), что число $ab-n$ делится на $(a-n)(b-n)$. Рассмотрите данную задачу хотя бы для конкретных значений n.
4. Найдите все такие натуральные числа a, b и c ($1<a<b<c$), что число $abc-1$ делится на $(a-1)(b-1)(c-1)$.
5. Найдите все такие натуральные числа a, b и c ($2<a<b<c$), что число $abc-2$ делится на $(a-2)(b-2)(c-2)$.
6. Найдите все такие натуральные числа a, b и c ($n<a<b<c$), что число $abc-n$ делится

на $(a-n)(\text{b}-n)(c-n)$.

7. Общий случай : Найдите все такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(n<a_1<a_2<\ldots<a_k)$, что число $a_1a_2\ldots a_k-n$ делится на $(a_1-n)(a_2-n)\ldots(a_k-n)$.
8. Предложите свои интересные направления исследования в этой задаче и по возможности исследуйте их.

Задача № 3. Прямоугольники на координатной плоскости

1.1. Площадь треугольника ABC равна S. Треугольник A_1B_1C получен из треугольника ABC с помощью гомотетии с центром в точке C и коэффициентом 2 (точки A_1 и B_1 лежат на лучах CA и CB за точками A и B). Аналогично, треугольник AB_2C_2 получен из треугольника ABC с помощью гомотетии с центром в точке A и коэффициентом 2, треугольник A_3BC_3 получен из треугольника ABC с помощью гомотетии с центром в точке B и коэффициентом 2. Обозначим точки пересечения пар прямых A_1B_1 и A_3C_3, A_1B_1 и B_2C_2, A_3C_3 и B_2C_2 соответственно через A_0, B_0 и C_0. Найдите площадь треугольника $A_0B_0C_0$.

1.2. Чему будет равна площадь треугольника $A_0B_0C_0$, если коэффициенты гомотетии пункта 1.1 равны не 2, 2, 2, а p, q, r соответственно?

1.3. Проделайте аналогичные построения и исследования для параллелограмма $ABCD$.

1.4. Проделайте аналогичные построения и исследования для тетраэдра $ABCD$.

Исследуйте эту задачу в одном или нескольких следующих направлениях.

2. Обозначим прямую AB из пункта 1.1 через c_1, прямую A_1B_1 через c_2, прямую, проходящую через точку C параллельно прямой c_1 через c_0. Продолжим построение прямых, параллельных c_1 и таких, что расстояние между парами соседних прямых одинаково для всех пар; будем последовательно обозначать их c_3, c_4, c_5 для одной полуплоскости и c_{-1}, c_{-2}, c_{-3} для другой (в частности, прямая c_{-2} пройдет через точку C_0). Аналогично построим серии параллельных прямых a_k и b_m, $k,m \in \mathbf{Z}$.

   Ясно, что при пересечении любых трех прямых a_k, b_m и c_n, $k,m,n \in \mathbf{Z}$. Получится некоторый треугольник (обозначим его KLM), подобный исходному треугольнику ABC. Можно ли получить треугольник KLM из треугольника ABC с помощью одной или нескольких гомотетий описанного выше типа? (Введите свои – возможно новые – обозначения для точек пересечения рассматриваемых прямых.)

   Укажите по возможности более короткую последовательность гомотетий (центров и коэффициентов гомотетий) для получения треугольника KLM из треугольника ABC; в качестве центров гомотетий можно использовать любые точки пересечения прямых.

3. Исследуйте задачу аналогичную пункту 1.3 для произвольных четырехугольников (или хотя бы для некоторых классов четырехугольников, например, трапеций или даже равнобедренных трапеций). Попробуйте как можно более точно оценить сверху и снизу отношений площадей полученного и исходного четырехугольников (для различных классов четырехугольников или в целом для любых четырехугольников).
4. Рассмотрите подобные задачи в пространстве или предложите свои интересные направления исследования и по возможности исследуйте их.