XIV республиканский турнир юных математиков
(8-12 ноября 2012 г.)

Письменный (нулевой) тур

8 ноября 2012 года

ВНИМАНИЕ:

1) **время решения 3 час. = 180 мин**.;

2) **исследование по каждой задаче необходимо оформить в отдельной тетради** и подписать название команды, город, фамилию автора(ов);

3) **на первом листе** каждой тетради сделайте резюме своего исследования соответствующей задачи – то есть

– отдельно, четко и лаконично сформулируйте основные результаты вашего исследования этой задачи;

– оформление самого решения (оформление результатов – доказательств, примеров и других элементов исследования – начинайте **со второго листа тетради**).

4) интерес представляет как максимально полное решение авторской постановки, так и ваши собственные идеи, обобщения, направления (*утверждения, обоснования, гипотезы; разрешаются импровизации с конкретными результатами*);

Задача 1. Разность степеней

1. Пусть заданы натуральные числа a и n $(n>1)$. Обозначим через $F(a,n)$ количество различных пар натуральных чисел (x,y), удовлетворяющих уравнению

$$x^n - y^n = a. \qquad (1)$$

1.1) Для каждой заданной пары натуральных чисел a и n укажите способ нахождения всех решений уравнения (1) в натуральных числах x, y.

1.2) Найдите значение $F(a,n)$ для следующих значений a, n:

а) $a=10^{11}$, $n=2$;

б) a – произвольное натуральное число, $n=2$;

в) $a=2011^{2012}$, $n=4$;

г) $a=p^m$, $n=2^k$, где p – простое число, большее 2, m,k – натуральные числа.

1.3) Докажите, что существует бесконечно много простых чисел p, удовлетворяющих уравнению $F(p^4,3)=F(p,3)$.

2. Верно ли, что уравнение $bx^n - cy^n = a$ имеет конечное число решений в натуральных числах x и y, где a,b,c,n – натуральные параметры ($n>1$)?

3. Пусть a,b,c – натуральные числа, $b>1$, $c>1$. Конечно ли множество решений уравнения $b^x - c^y = a$ в натуральных числах x,y? В случае утвердительного ответа попытайтесь найти оценку сверху для числа решений.

4. Предложите и изучите Ваши собственные обобщения и направления исследования этой задачи.

Задача 2. Разложение многочленов на множители

а) Найти все целые числа a, такие, чтобы многочлен $x(x-a)+1$ можно было разложить на множители с целыми коэффициентами.
б) Найти различные между собой целые числа a, b чтобы многочлен $x(x-a)(x-b)+1$ можно было разложить на множители с целыми коэффициентами.
в) Найти различные между собой целые числа a, b чтобы многочлен $x(x-a)(x-b)+1$ можно было разложить на множители с целыми коэффициентами.
г) Найти различные между собой целые числа a, b, c, чтобы многочлен $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$ можно было разложить на множители с целыми коэффициентами.
д) Найти различные между собой целые числа a, b, c, чтобы многочлен $x(x-a)(x-b)(x-c)+2$ можно было разложить на множители с целыми коэффициентами.
е) Определите при каких условиях многочлен $x(x-a)(x-b)+d$ можно разложить на множители с целыми коэффициентами
ж) Определите при каких условиях многочлен $x(x-a)(x-b)(x-c)+d$ можно разложить на множители с целыми коэффициентами.
з) Рассмотрите многочлены более высокого порядка.

Задача 3. Построения с помощью двусторонней линейки

Предварительные задачи:

1. Даны две параллельные прямые. С помощью обычной линейки (без циркуля) разделите пополам отрезок, лежащий на одной из них.
2. Даны две параллельные прямые и точка P. Проведите через точку P прямую, параллельную данным прямым.

Во всех следующих пунктах построения следует выполнять с помощью двусторонней линейки (без циркуля), а именно: пусть имеется линейка с двумя параллельными краями, расстояние между которыми равно a, разрешаются следующие построения:

1) проводить прямую через две данные точки;
2) проводить прямую, параллельную данной и удаленную от нее на расстояние a;
3) через две данные точки A и B, где $AB > a$, проводить пару параллельных прямых, расстояние между которыми равно a. Таких пар параллельных прямых четыре: две пары такие, что точки A и B лежат на одной из этих прямых (назовем такие пары прямых – *внешними парами параллельных прямых для точек A и B*), и еще две пары такие, что точки A и B лежат на разных прямых (назовем такие пары прямых – *внутренними парами параллельных прямых для точек A и B*).

Рассмотрите следующие задачи:

3. а) Постройте биссектрису данного угла AOB.
   б) Дан острый угол AOB. Постройте угол BOC, биссектрисой которого является луч OA.
4. а) Восстановите перпендикуляр к данной прямой l.
   б) Восстановите перпендикуляр к данной прямой l, проходящий через данной точку A, лежащую на прямой l.
   в) Восстановите перпендикуляр к данной прямой l, проходящий через в точку A, не лежащую на прямой l.
5. а) Постройте середину данного отрезка.
   б) Через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой.
6. Даны угол AOB, прямая l и точка P на ней. Проведите через точку P прямые, образующие с прямой l угол, равный углу AOB.
7. Даны отрезок AB, непараллельная ему прямая l и точка М на ней. Постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса AB с центром M.
8. Даны прямая l и отрезок OA, параллельный l. Постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса OA с центром O.
9. Верно ли, что все задачи на построение, решаемые (выполняемые) с помощью циркуля и линейки, могут быть решены с помощью двусторонней линейки (попробуйте построить соответствующую теорию: сформулируйте необходимые определения, аксиомы, утверждения, обоснования).
10. Какие задачи на построение могут быть решены с помощью обычной линейки на клетчатой плоскости (попробуйте построить теорию таких построений, аналогичную пунктам 3-9).