<u>Исследовательские задания</u>
<u>XIV республиканского турнира юных математиков</u>

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задания носят исследовательский характер, наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- Необходимо максимально полно исследовать каждый пункт задачи, но <u>интерес представляют даже *отдельные частные случаи*</u>;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки <u>*полезно рассмотреть свои направления*, причем совсем необязательно ваши исследования должны совпадать с предложениями авторов</u>;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном или аккуратно написанном от руки виде; при этом
  - оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором нужно указать номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автора (ов) исследования (решения);
  - **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте <u>ВАШИ СОБСТВЕННЫЕ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ</u> (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);
  - **ОБЯЗАТЕЛЬНО** дайте четкие ссылки на литературу и другие источники, которые вы использовали при проведении исследований.

<u>№ 1. Перестановки</u>

1.1) Есть набор $a = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ из n элементов двух типов (k элементов первого типа, расположенных с a_1 по a_k, и $n-k$ элементов второго типа, расположенных с a_{k+1} по a_n). Найдите такую перестановку $(b_1, \dots, b_n)$ набора a, чтобы количество равенств $a_i = b_i$, $1 \le i \le n$, было минимальным. (Под перестановкой набора a понимается набор, состоящий из тех же элементов, расположенных в другом порядке. Два элемента равны, если они принадлежат одному типу.)

1.2) Обобщите пункт 1.1) на случай элементов m типов ($m \le n$).

1.3) Пусть $S(a,b) = \begin{cases} 1, & a = b, \\ -1, & a \ne b. \end{cases}$ Найдите такую перестановку $(b_1, \dots, b_n)$ набора a из пункта 1.1), чтобы сумма $\sigma = S(a_1,b_1) + S(a_2,b_2) + \dots + S(a_n,b_n)$ была как можно ближе к нулю. При каких значениях n и k сумма σ будет равна нулю?

1.4) Предложите свои обобщения и исследуйте их.

2.1) Найдите такую перестановку $(a_1, \dots, a_n)$ натуральных чисел от 1 до n, чтобы сумма $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n|$ была наибольшей.

2.2) Найдите такую перестановку $(a_1, \dots, a_n)$ натуральных чисел от 1 до n, чтобы сумма $(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 2)^2 + \dots + (a_n - n)^2$ была наибольшей.

2.3) Найдите такую перестановку $(a_1, \dots, a_n)$ натуральных чисел от 1 до n, чтобы сумма $\sqrt[5]{a_1 - 1} + \sqrt[5]{a_2 - 2} + \dots + \sqrt[5]{a_n - n}$ была наибольшей.

2.4. Как много существует перестановок $(a_1, \dots, a_n)$ натуральных чисел от 1 до n, чтобы сумма $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$, была равна: а) минимально возможной, б) максимально возможной?

2.5) Предложите свои обобщения и исследуйте их.

3. $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ — набор положительных действительных чисел, упорядоченных по неубыванию.

3.1) Пусть $n = 2k$. Найдите такую перестановку $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ набора b, чтобы сумма $a_1 a_2 + a_3 a_4 + \dots + a_{2k-1} a_{2k}$ была а) минимальной, б) максимальной.

3.2) Пусть $n = 3k$. Найдите такую перестановку $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ набора b, чтобы сумма $a_1 a_2 a_3 + \dots + a_{3k-2} a_{3k-1} a_{3k}$ была а) минимальной, б) максимальной.

3.3) Предложите свои обобщения и исследуйте их.

№ 2. Делимость многочленов

Для многочленов P и Q определим новый многочлен $P \circ Q$ по правилу $(P \circ Q)(x) = P(Q(x))$.

1) Чему равна степень $P \circ Q$, если степень P равна n, а степень Q равна m?
2) Верно ли, что для любых P и Q справедливо равенство $P \circ Q = Q \circ P$?
3) Верно ли, что любого многочлена P существует такой многочлен Q степени больше первой, что $P \circ Q = Q \circ P$? (*Примечание.* Проверьте (докажите или опровергните) это утверждение хотя бы для многочленов некоторых степеней.)
4) Найдите все числа a и b, для которых многочлен $P(ax+b)$ делится на $P(x)$.
5) Пусть P – многочлен не менее первой степени. Докажите, что если $P(0) = 0$, то $P \circ P \circ P$ делится на P. Верно ли обратное утверждение?
6) Найдите все многочлены P ненулевой степени такие, что для любого натурального n многочлен $P \circ P \circ \dots \circ P$ (здесь P стоит n раз) делится на P. Будем далее использовать для таких многочленов краткое обозначение $P \circ P \circ \dots \circ P = P^{\circ n}$.
7) Для каждой пары натуральных чисел n и m, где $n > m$, найдите все многочлены $P(x) = ax+b$ первой степени, для которых $P^{\circ n}$ делится на $P^{\circ m}$.
8) Для каждого многочлена P степени выше первой найдите хотя бы один многочлен Q степени выше первой, для которого $Q \circ P$ делится на Q.
9) Найдите все многочлены P, для которых $P^{\circ 2012}$ делится на $P^{\circ 2000}$.
10) Для каждой пары (или хотя бы для некоторых пар) натуральных чисел n и m, где $n > m$, найдите все многочлены $P(x)$, для которых $P^{\circ n}$ делится на $P^{\circ m}$.

№ 3. Неравенство

0. а) Пусть $a \in [0;1]$. Докажите, что $\frac{(a+1)^2}{2a^2-2a+1} \le 6a + \frac{3}{2}$ и равенство достигается только при $a - \frac{1}{2}$.

б) Пусть $a, b > 0$ и $a + b = 1$. Покажите, что выполняется неравенство $\frac{(2a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a+2b)^2}{a^2+b^2} \le 9$.

в) Пусть $a, b > 0$. Докажите неравенства:

$$1 \le \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \le 2 \quad \text{и} \quad 0 \le \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} \le 1.$$

г) Пусть $a,b>0$. При различных значениях K получите оценки сверху и снизу для выражений вида: $\dfrac{(Ka+b)^2}{|K|\cdot a^2+b^2}+\dfrac{(a+Kb)^2}{a^2+|K|\cdot b^2}$.

Примечание. Предлагается последовательно рассмотреть случаи: $K=\pm 2$, произвольные значения $K\in Z$ (хотя бы для некоторых K), общий случай: $K\in R$.

1. Пусть $a,b,c>0$.

а) Докажите неравенство

$$\frac{(-a+b+c)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(-b+a+c)^2}{b^2+(a+c)^2}+\frac{(-c+b+a)^2}{c^2+(b+a)^2}\geq\frac{3}{5}.$$

б) Найдите наименьшее число C такое, что

$$\frac{(-a+b+c)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(-b+a+c)^2}{b^2+(a+c)^2}+\frac{(-c+b+a)^2}{c^2+(b+a)^2}\leq C.$$

в) Докажите неравенство

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+b+a)^2}{2c^2+(b+a)^2}\leq 8.$$

г) Найдите наибольшее число C такое, что

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+b+a)^2}{2c^2+(b+a)^2}\geq C.$$

2. Пусть $a_i>0$, $1\leq i\leq n$, $n\geq 3$, $K\in\mathbb{Z}$. Обозначим через F выражение

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(Ka_j+\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n}a_i\right)^2}{|K|a_j^2+\left(\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n}a_i\right)^2}$$

а) Пусть $K=-1$. Для любого натурального $n\geq 3$ найдите наибольшее $m=m(n)$ и наименьшее $M=M(n)$ такие, что $M(n)\geq F\geq m(n)$.

б) Тот же вопрос при $K=2$.

в) Для любого натурального $n\geq 3$ и любого целого K найдите наибольшее $m=m(n,K)$ и наименьшее $M=M(n,K)$ такие, что $M(n,K)\geq F\geq m(n,K)$.

г) Существует ли такое значение K, при котором существует $m>0$ такое, что для любого натурального $n\geq 3$ будет верно неравенство $F\geq m$?

№ 4. Суммы квадратов

Будем говорить, что число n является (a, b)-*квадратом*, где a и b – целые числа, если найдутся такие целые числа x и y, что $n=ax^2+by^2$. Аналогично, n будем называть (a, b, c)-*квадратом* для целых чисел a, b и c, если найдутся целые числа x, y и z такие, что $n=ax^2+by^2+cz^2$. Число, представимое в виде суммы t квадратов целых чисел, будем называть t-*квадратом*. В частности, (1,1)-квадрат является 2-квадратом.

1. Пусть число n является 2-квадратом.

а) Докажите, что $2n$, n^2 и n^3 также является 2-квадратами.

б) Докажите, что $3n$ не является 2-квадратом.

в) Найдите все натуральные числа k и m, при которых числа kn и n^m будут являться 2-квадратами.

2. Пусть числа n и m являются (a, b)-квадратами.

а) Докажите, что если $a = 1$, то nm также является (a, b)-квадратом.

б) Найдите все целые a и b, для которых nm является (a, b)-квадратом.

в) Предложите аналогичные вопросы для (a, b, c)-квадратов и исследуйте их.

3. Пусть число $n^2 = a + b$, где n, a, b – целые числа.

а) Докажите, что $2(a^3 + b^3)$ является 3-квадратом, $4(a^5 + b^5)$ – 4-квадратом.

б) Найдите все натуральные числа r, k и t, при которых числа $r(a^k + b^k)$ будут t-квадратами.

4. а) Докажите, что для любого целого n число $3n^4 + 1$ является 3-квадратом.

б) Ответьте на вопрос, при каких натуральных числах k и r число $rn^k + 1$ будет являться t-квадратом для некоторого целого числа t, а при каких нет? Найдите все натуральные числа r, k и t, при которых числа $r(a^k + b^k)$ будут t-квадратами.

в) Общий вопрос: какие натуральные числа являются t-квадратами? Укажите все эти числа или хотя бы какие-то наборы таких чисел (возможно задаваемые общей формулой или рекуррентно).

5. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

№ 5. Последовательности натуральных чисел и стороны треугольников

0. Натуральные числа от 1 до 200 разбили на 50 множеств. Докажите, что по крайней мере в одном из них найдутся три различных числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника.
1. Пусть k_n – наибольшее число, такое, что если разбить числа от 1 до n на k_n групп, то в какой-то группе обязательно найдутся три различных числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника. а) Найдите k_{20}; б) найдите k_{30}; в) найдите или хотя бы оцените сверху или снизу k_{50}; г) найдите или оцените сверху или снизу значения k_n при других значениях n.
2. Пусть n_k – наименьшее число такое, что если разбить числа от 1 до n_k на k групп, то в какой-то группе обязательно найдутся три различных числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника. а) Найдите n_5; б) найдите n_7; в) попробуйте найти число n_k при других значениях k или хотя бы оценить его сверху или снизу.
3. Исследуйте те же вопросы для сторон четырёхугольников, пятиугольников и т.д.
4. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

№ 6. Точки пересечения диагоналей правильных многоугольников

Исследуется возможность пересечения трех и более диагоналей правильных n-угольников в одной точке. Случай, когда диагонали пересекаются в центре многоугольника будем называть тривиальным. Предлагается решить следующие задачи.

1. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую необходимое и достаточное условие пересечения трех и более диагоналей правильных n-угольников в одной точке.
2. Исследуйте правильный девятиугольник. Пронумеровав индексами его вершины, найдите в нем все пересекающиеся диагонали. Сколько диагоналей правильного девятиугольника могут пересекаются в одной точке? Какое максимальное количество диагоналей правильного девятиугольника пересекаются в одной точке?
3. Проведите аналогичные исследования для случаев n = 10, 18, 24. Какое максимальное количество диагоналей правильного n-угольника (n = 10, 18, 24) пересекаются в одной точке, в случае отличном от тривиального?

4. Попробуйте получить оценку максимального числа диагоналей правильного n-угольника, пересекающихся в одной точке (для произвольного n в случае, отличном от тривиального).
5. Используя результаты исследований, решите следующие задачи:
   а) Докажите, что диагонали A_1A_{n+2}, $A_{2n-1}A_3$, $A_{2n}A_5$ правильного $2n$-угольника пересекаются в одной точке.
   б) В треугольнике ABC с углами $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$ на сторонах BA и BC взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DCA = 50°$ и $\angle EAC = 40°$. Найдите $\angle AED$.
6. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

№ 7. Многоугольники на плоскости

1. Пусть на плоскости задано множество S из n точек, находящихся в общем положении (никакие три из них не лежат на одной прямой). Всегда ли можно построить замкнутую ломаную без самопересечений, проходящую через все точки множества S?
2. Предположим, что любые четыре точки из множества S являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что точки множества S являются вершинами выпуклого n-угольника.
3. Пусть никакие три диагонали выпуклого n-угольника M ($n > 3$) не пересекаются в одной точке. Найти число областей, на которые M делится своими диагоналями. Сколько среди таких областей являются треугольниками? (Дайте точные значения или хотя бы оценку для этих чисел.)
4. Для заданного натурального числа $n \geq 4$ найти наибольшее натуральное число k, для которого существует выпуклый n-угольник, разбиваемый всеми своими диагоналями на области, среди которых существует, по крайней мере, один k-угольник.
5. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

№ 8. Числа на окружности

0. Известно, что десять натуральных чисел: 1, 2, …, 10 можно расставить вдоль окружности так, чтобы для любых трех подряд идущих чисел a, b, c разность $b^2 - ac$ делилась на 11. *Пример*: 1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6.
1. Предложите аналогичное построение для 12 чисел. Более точно: числа от 1 до 12 расставьте вдоль окружности так, чтобы для любой тройки подряд идущих чисел a, b, c разность $b^2 - ac$ делилась на 13.
2. Приведите аналогичные конструкции для других наборов чисел.
3. Докажите, что это возможно сделать для любых $p - 1$ чисел, где p – простое число.
4. Можно ли таким же образом расположить числа от 1 до $n - 1$ вдоль окружности, если n – составное число?
5. Предложите свои направления исследования или обобщения этой задачи и изучите их.

№ 9. Игры с фишками

1. Рассмотрим клеточное поле 1×9, изначально пустое. Два игрока играют в игры с фишками. В каждой из описанных ниже игр требуется узнать, какой игрок выиграет при правильной

игре (тот, который ходит первым, либо тот, который ходит вторым) и какую стратегию при этом нужно использовать. Во всех играх проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

1.1. За один ход разрешается поставить одну фишку в любую не занятую клетку поля. Здесь и во всех ниже следующих играх в одну клетку можно поставить не более одной фишки.

1.2. За один ход разрешается поставить одну либо две фишки в любые незанятые клетки поля.

1.3. За один ход разрешается поставить одну либо две фишки в **рядом стоящие** незанятые клетки поля.

1.4. За один ход разрешается поставить две фишки в **рядом стоящие** незанятые клетки поля.

1.5. За один ход разрешается поставить не более k фишек, где k – половина количества пустых клеток (если осталась одна пустая клетка, ход сделать уже нельзя).

1.6. Игра 1.3, но изначально во второй (k-ой) с конца клетке уже стоит фишка.

1.7. Обобщение игры 1.2: разрешается поставить от 1 до k фишек.

1.8. Обобщение игры 1.2: разрешается поставить одну, три либо четыре фишки.

1.9. Обобщение игр 1.7 и 1.8: разрешается поставить k фишек, где $k \in$ A (для начала рассмотрите одно- и двухэлементные множества A; в частности, в игре 1.8 множество A = {1,3,4}).

1.10. Обобщение игры 1.4: разрешается поставить k рядом стоящих фишек.

2. Рассмотрите эти игры для поля $1 \times N$.
3. Предложите и изучите свои обобщения задачи (например, попробуйте обобщить эту задачу на поле $2 \times N$).

<u>№ 10. Диофантовы уравнения в виде цепных дробей</u>

1. Для различных целых значений m решите диофантово уравнение следующего вида $x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = m$, т.е. найдите все тройки целых чисел (x, y, z), которые обращают его в верное равенство. В частности:

   1.А) решите это уравнение при $m = 10$;

   1.Б) конечное или бесконечное количество решений имеет такое уравнение при различных значениях m?

   1.В) получите все решения в общем случае (для произвольных $m \in Z$).

2. Решите диофантово уравнение вида $x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \dfrac{m}{n}$, где m и n – целые числа, $n \neq 0, \pm 1$.

   В частности:

   2.А) решите это уравнение при $\dfrac{m}{n} = \dfrac{10}{7}$;

   2.Б) оцените количество решений в зависимости от m и n (хотя бы для отдельных значений параметров);

   2.В) решите уравнение в общем случае (или предложите алгоритм, позволяющий найти все решения).

3. Исследовать уравнение с двумя неизвестными $ax+\frac{c}{by}=m$, где коэффициенты *a, b, c* – целые.
4. Исследовать уравнение вида $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=m$, в котором перед *x, y, z* стоят некоторые целые или рациональные коэффициенты.
5. Исследовать диофантово уравнение в виде цепной дроби с большим числом неизвестных, например, если слева стоит 4-этажная дробь.
6. Исследовать уравнения вида $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=m$, в котором *x, y, z, m* принадлежат множеству $Z(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Z}\}$.
7. Предложите свои направления исследования или обобщения этой задачи и изучите их.

№ 11. «Рога и копыта»

I. Исходная постановка. Фирма «Рога и копыта» приобрела счетную машинку, которая может производить только две операции:
- для любого введенного числа *a* она выдает число *–a* (т.е. для любого числа можно получить ему противоположное),
- для двух введенных чисел *a* и *b* она выдает значение выражения $1-\frac{a}{b}$ (будем далее для краткости обозначать эту операцию *a*b*). Однако Остап Бендер научился с помощью этой машинки производить все четыре арифметических действия (сложение, умножение, вычитание, деление). Попробуйте и вы с ее помощью по заданным числам *a* и *b* получить:

а) частное, произведение, разность и сумму этих чисел (***примечание – подсказка***: заметьте, что $(a*b)*1 = a/b$),

б) какие из указанных значений вы сможете вы получить, если машинка вместо второй операции для двух чисел *a* и *b* выдает значение $a\circ b=p-\frac{a}{b}$, где *p* – некоторое фиксированное число;

в) то же, что и в пункте б), но теперь вторая операция выглядит так: $a\bullet b=p-q\frac{a}{b}$, где *p* и *q* – некоторые фиксированные числа.

II. Общая постановка. Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их. В самой общей постановке задача может выглядеть так:

А) Пусть счетная машинка может выполнять только две операции: получение для любого введенного числа ему противоположного и получение для двух заданных чисел *a* и *b* значения выражения

$$a*b = p\cdot a^{\alpha}\cdot b^{\beta} + q\cdot a^{\gamma}/(b^{\delta}),$$

где *p* и *q* – целые, а α, β, γ, δ могут принимать одно из значений 0 или 1. При каких наборах $(p, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, используя данную операцию можно получить стандартные арифметические операции (см. п. I.а), а при каких нет?

Б) Исследуйте эту задачу при других значениях параметров $p, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Замечания. 1) Полученные в результате каких-то действий числа мы можем сохранять (запоминать).

2) Во всех пунктах задачи важны, с одной стороны, разработка метода – как «получить ту или иную операцию», либо, с другой стороны, – метода «как доказать, что нельзя ее получить».

3) Исследуйте пункты I.б) и в), а также общую постановку как в случае, когда числа p и q известны, так и в случае, когда пользователям машинки изначально эти числа неизвестны.

№ 12. Кошки-Мышки

1. В одной из вершин правильного треугольника сидит мышка. Каждую секунду она перебегает в одну из соседних по стороне вершин.

   1.1. Сколькими способами мышка сможет вернуться в исходную вершину через n секунд? (Под различными способами понимаем различные пути перемещения из вершины в вершину, при этом имеется в виду первое возвращение в исходную вершину ровно через n секунд.)

   1.2. Сколькими способами мышка сможет дважды вернуться в исходную вершину за n секунд (имеется в виду второе возвращение в исходную вершину ровно через n секунд, аналогично для следующих пунктов)?

   1.3. Сколькими способами мышка сможет k раз вернуться в исходную вершину за n секунд?

   1.4. Сколькими способами мышка сможет вернуться в исходную вершину через n секунд, если в одной из вершин треугольника сидит кошка? (Ясно, что ходить в вершину, занятую кошкой, запрещается.)

   1.5. Рассмотрите случай, когда кошка также перемещается каждую секунду.
2. В одной из вершин квадрата сидит мышка. В противоположной (по диагонали) вершине лежит кусок сыра. Каждую секунду мышка перебегает в одну из соседних по стороне вершин.

   2.1. Сколькими способами мышка сможет добраться до сыра в течение n секунд?

   2.2. Ответьте на вопросы аналогичные вопросам пункта 1.
3. Рассмотрите вопросы пунктов 1, 2 для произвольных правильных многоугольников.
4. Рассмотрите вопросы пунктов 1, 2, 3 в предположении, что

   4.1. в одной из вершин многоугольника можно побывать не более чем s раз;

   4.2. в каждой из вершин многоугольника можно побывать не более чем s раз.
5. Рассмотрите вопросы пунктов 2, 3, 4 в предположении, что

   5.1. мышек не одна, а m штук, а к сыру должна пробиться хотя бы одна из них;

   5.2. вместо кошки в некоторых вершинах многоугольника стоят мышеловки, которые срабатывают, когда в них попадает мышка (или одновременно несколько мышек; при этом все мышки-«саперы» погибают), но в дальнейшем для остальных мышек указанная вершина является безопасной.
6. Рассмотрите вопросы пунктов 1-3, если мышек m и одновременно в одной точке не может находиться более одной мышки. Кроме того, предполагается, что движение навстречу друг другу по одной стороне многоугольника невозможно.
7. Рассмотрите следующие обобщения задачи и/или предложите свои:

   7.1. вместо правильных многоугольников рассмотрите различные виды графов (можно начать хотя бы с деревьев), в некоторых вершинах которых сидят кошки (стоят мышеловки);

   7.2. мышкам разрешается размножаться; например, каждую секунду в исходную вершину добавляется по мышке, требуется определить среднее время достижения вершины с сыром при указанном расположении кошек-мышеловок;

7.3. кошки-мышеловки «съедают» не всех попавших к ним мышек, а только одну (т.е. если, например, три мышки одновременно попали к кошке, то одну мышку съели, а две другие выжили и на следующем ходу покинут вершину с кошкой; правда, эта же кошка может съесть данных мышек на следующих ходах.).

№ 13. Нормали

1. Пусть на координатной плоскости задана некоторая прямая $ax + by + c = 0$. К этой прямой построены две нормали – векторы n_1 и n_2. Будем называть началом нормали её основание (начало вектора, оно лежит на заданной прямой), а концом – другой конец вектора.

Пусть длины нормалей представляют собой непрерывные функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ от времени t (положительная длина означает, что нормаль находится в полуплоскости $ax + by + c > 0$, отрицательная – в полуплоскости $ax + by + c < 0$), время изменяется от 0 до s, т.е. $t \in [0, s]$. Координаты абсцисс начала нормалей представляют собой некоторые непрерывные функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Концы нормалей соединяются прямой L. Требуется найти координаты точки пересечения прямых L и $ax + by + c = 0$ в зависимости от времени $t \in [0, s]$.

2. Обратная задача: пусть абсциссы точек пересечения прямых L и $ax + by + c = 0$ описываются некоторой заданной функцией $g(t)$. Найдите (опишите) всевозможные функции $h_1(t)$, $h_2(t)$, $x_1(t)$ и $x_2(t)$, указанные в пункте 1.

Возможно, ваше описание будет выглядеть следующим образом: для однозначного определения четверки указанных функций (т.е. $h_1(t)$, $h_2(t)$, $x_1(t)$ и $x_2(t)$) необходимо сначала дополнительно определить некоторые из них (укажите какие?), а остальные определяются по всем заданным функциям однозначно (укажите как?). Возможны другие варианты описания. Сделайте свои предложения и изучите их.

3. Рассмотрите случаи, когда основания нормалей принадлежат не прямой, а некоторой кривой (заданной параболе, гиперболе и т.п.).

4. Рассмотрите различные обобщения этой задачи на трехмерное пространство.

5. Предложите и исследуйте свои обобщения данной задачи.