XVI республиканский турнир юных математиков
(5-10 декабря 2014 г.)

Письменный (нулевой) тур

6 декабря 2014 года

ВНИМАНИЕ:

1) **время решения 3 час. = 180 мин**.;

2) **исследование по каждой задаче необходимо оформить в отдельной тетради** и подписать название команды, город, фамилию автора(ов);

3) **на первом листе** каждой тетради сделайте резюме своего исследования соответствующей задачи – то есть

– отдельно, четко и лаконично сформулируйте основные результаты вашего исследования этой задачи;

– оформление самого решения (оформление результатов – доказательств, примеров и других элементов исследования – начинайте **со второго листа тетради**).

4) интерес представляет как максимально полное решение авторской постановки, так и ваши собственные идеи, обобщения, направления (*утверждения, обоснования, гипотезы; разрешаются импровизации с конкретными результатами*);

Задача № 1. Псевдоцелые и псевдодробные части

Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x (обозначается $[x]$), иначе говоря: $[x] = k \in Z$, $k \le x < k+1$.

Дробной частью числа x называется разность между x и его целой частью (обозначается $\{x\}$), т.е. $\{x\} = x - [x]$.

Назовем псевдоцелой частью числа x ближайшее к x целое число (обозначим $]x[$). Если таких чисел два, то берется большее. Таким обазом, псевдоцелая часть числа получается путем округления этого числа до целого по классическим правилам.

Псевдодробную часть числа x определим по правилу $\langle x \rangle = x -]x[$.

1. Найдите аналитическую формулу для определения функции $y =]x[$.
2. Постройте график функции $y = \langle x \rangle$.
3. Решите уравнения:

a) $2x =]x[$, b) $ax =]x[$, c) $a[x] =]x[$, d) $\{x\} = 2\langle x \rangle$,

e) $a\{x\} = \langle x \rangle$, f) $a\langle x \rangle =]x[$, g) $a\langle x \rangle + b]x[+ cx = 0$,

h) $a\langle x \rangle + b]x[+ cx = d$, i) $]x[+]2x[+]3x[=3$;

j) $]x[+]2x[+]3x[+\ldots+]nx[=1$; k) $\frac{3x-4}{5} = \left]\frac{2x-1}{3}\right[$, l) $\frac{5x-4}{5} = \left]\frac{2x-1}{3}\right[+ \left]\frac{3x-2}{2}\right[$.

Здесь a, b, c, d –действительные числа, n – натуральное. Напоминаем, что решить уравнение с параметром означает, что нужно указать, какие решения будет иметь уравнения при **всех** значениях параметра.

4. Предложите свои интересные обобщения приведенных выше уравнений и методы их решения.

Задача № 2. Иррациональные числа и иррациональные корни специального вида

1. Начальные задачи.

   1.1. Докажите, что для любого натурального числа *n*, не являющегося точным квадратом, число $\sqrt{n}$ иррационально. (Возможно, Вам понадобится сначала доказать утверждение для частных случаев, например, *n* = 2, 3, 5, 6, …, на затем рассмотреть общий случай для всех *n*.)

   1.2. (*Практическая задача*). Даны две бочки бесконечно большой емкости. Можно ли, пользуясь ковшами емкости $\sqrt{2}$ и $2-\sqrt{2}$ литров, перелить из одной из них в другую ровно 1 литр воды.

   1.3. Докажите, что число $\sqrt[3]{2}$ нельзя представить в виде $p+q\sqrt{r}$, где *p, q, r* - рациональные числа.

2. Первые обобщения.

   2.1. Докажите, что выражение $99999+111111\sqrt{3}$ нельзя представить в виде $(A+B\sqrt{3})^2$, где *A* и *B* – целые числа.

   2.2. Существуют ли такие рациональные числа *p, q, r, s,* что при некотором *n*

$$(p+q\sqrt{3})^{2n}+(r+s\sqrt{2})^{2n}=5+4\sqrt{2}.$$

   2.3. Докажите, что любую натуральную степень числа $\sqrt{2}-1$ можно представить в виде $\sqrt{N}-\sqrt{N-1}$, где *N* – целое число. (Так, например, $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}$, а $(\sqrt{2}-1)^3=5\sqrt{2}-7=\sqrt{50}-\sqrt{49}$.)

3. Применение к решению рациональных уравнений.

   3.1. Известно, что уравнение $x^4+ax^3+29x^2+bx+4=0$ с рациональными коэффициентами имеет корнем число $2+\sqrt{3}$. Найдите остальные корни этого уравнения.

   3.2. Обоснуйте следующий алгоритм нахождения рациональных корней уравнения вида $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ с целыми коэффициентами (если они, конечно, существуют): если x_0 – рациональный корень такого уравнения, то он обязательно равен $x_0=\frac{p}{q}$, где *p* – делитель свободного члена (т.е. a_0), а *q* – делитель a_n. Распространите этот алгоритм на такие же уравнения с рациональными коэффициентами.

   3.3. Попробуйте определить корни вида $a+b\sqrt{2}$, $a+b\sqrt{3}$, …, $a+b\sqrt{n}$, где *a, b* ∈ Q, таких уравнений (по крайней мере, постройте алгоритмы определения таких корней). Может, вы сможете определять корни более сложного вида (например, $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, $a+b\sqrt[3]{2}$ и даже сложнее и т.п.)

Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

<u>Задача № 3. Суммы углов самопересекающихся многоугольников</u>

<u>Для начала несколько определений.</u> *Самопересекающийся* многоугольник – замкнутая ломаная линия, звенья которой могут пересекать друг друга. В противном случае многоугольник будет называться самонепересекающимся. Точки пересечения сторон многоугольника (или точки самопересечения) не являются его вершинами. Углами будем считать углы при вершинах многоугольника.

Сумму углов самопересекающегося многоугольника можно корректно определить, только для ориентированного многоугольника. <u>Более точно</u>: если каждой стороне многоугольника задать направление, т.е. указать, какую из двух определяющих ее вершин мы будем считать ее началом, а какую – концом, и притом так, чтобы начало каждой стороны было концом предыдущей, то получится *замкнутый многоугольный путь*, или *ориентированный многоугольник*.

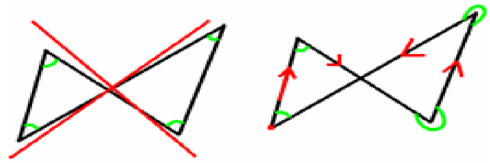


Рис. 1

В этом случае под его углом будем понимать угол между соседними сторонами, взятый с одной стороны (например, справа) относительно выбранного направления (см. рис. 1). Таким образом, сумму углов самопересекающегося многоугольника можно посчитать двояко («справа» относительно выбранного направления или «слева»).

Рассмотрите задачу нахождения сумм углов самопересекающихся многоугольников в двух основных направлениях.

<u>Направление 1.</u> <u>*Определение* 1</u>. Назовем точку самопересечения многоугольника *простой*, если часть многоугольного пути, определенного последовательными звеньями многоугольника, начинающаяся и заканчивающейся в этой точке, не имеет других точек самопересечения. Указанную часть многоугольного пути назовем *петлей* самопересекающегося многоугольника (рис. 2).

Петли могут быть двух видов: внешние и внутренние (см. разные случаи на рис. 2).

<u>*Определение* 2</u>. Самопересекающийся многоугольник назовем *многоугольником с петлями*, если он состоит из основной части (*основного многоугольника*) и нескольких петель. Основной многоугольник получается из самопересекающегося многоугольника с петлями отбрасыванием всех петель (отсечением петель в соответствующей точке самопересечения).

Для определенности выбор направления ориентированного многоугольника и углов будем далее осуществлять таким образом, чтобы в сумме углов учитывались внутренние углы основного многоугольника.

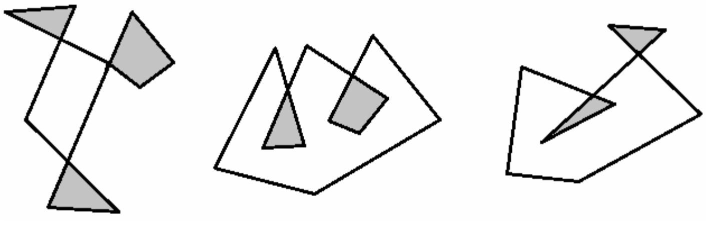


Рис. 2.

<u>Задачи</u>: 1.1) Найдите сумму углов самопересекающегося четырехугольника.

1.2) Найдите сумму углов самопересекающегося пятиугольника: а) с одной внешней петлей; б) с одной внутренней петлей.

1.3) Найдите сумму углов самопересекающегося n-угольника: а) с одной внешней петлей (двумя, тремя, … внешними петлями); б) с одной внутренней петлей (двумя, тремя, … внутренними петлями); в) <u>с m внутренними и k внешними петлями</u>.

1.4) Предложите свои задачи и обобщения в этом направлении и исследуйте их.

<u>Направление 2.</u> <u>*Определение* 3.</u> Назовем самопересекающийся многоугольник *правильным звездчатым*, если всего его стороны равны и каждая следующая повернута в одном и том же направлении, на один и тот же угол по отношению к предыдущей.

<u>*Свойство* 1.</u> Все вершины правильного звездчатого многоугольника лежат на одной окружности (окружности, описанной около него; <u>*попробуйте это доказать*</u>!).

Рис. 3

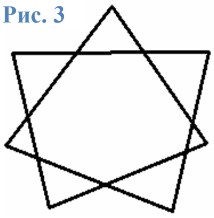
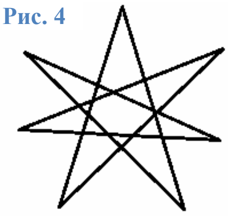


Рис. 4



Существуют различные виды правильных звездчатых многоугольников даже с одинаковым количеством вершин (сторон). Будем обозначать их S(n, k), где n – число вершин (сторон) звездчатого многоугольника, k – через сколько вершин, расположенных на описанной окружности, находятся две его смежные вершины (т.е. соединенные одной стороной), если считать одну из этих смежных, $k < n/2$.

Например, для звездчатого семиугольника есть два различных вида: S(7, 2) и S(7, 3) (см. рис. 3 и 4).

<u>Задачи</u>: 2.1) Найдите сумму углов звездчатого пятиугольника.

2.2) Найдите сумму углов звездчатых семиугольников S(7, 2) и S(7, 3).

2.3) <u>*Исследуйте общий вопрос*</u>: для каких n и k существуют правильные звездчатые многоугольники вида S(n, k). Найдите суммы углов таких многоугольников. (Для начала попробуйте рассмотреть хотя бы некоторые частные случаи.)

2.4) Предложите свои задачи и обобщения в этом направлении и исследуйте их.

<u>*Предложите свои направления исследования этой задачи и изучите их.*</u>