# Исследовательские задания
# XVI республиканского турнира юных математиков

**Примечание.** Тексты исследовательских заданий в электронном виде представлены также на сайте **http://www.uni.bsu.by**. В случае обнаружения опечаток, двусмысленностей и других неточностей, а также в случае возникновения вопросов по условиям просим обращаться по адресам электронной почты (или по телефонам), указанным выше.

---

Обращаем ваше **ВНИМАНИЕ** на то, что предлагаемые задания (далее – задачи) носят исследовательский характер, наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- необходимо по возможности максимально полно исследовать каждую задачу, но в то же время нужно иметь в виду, что в ряде задач интерес представляют даже *отдельные частные случаи задач (или их пунктов)*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) вы *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно рассмотреть свои направления*, причем ваши исследования необязательно должны совпадать с предложениями авторов;
- **ИССЛЕДОВАНИЕ ПО КАЖДОЙ ЗАДАЧЕ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО** в распечатанном или аккуратно написанном от руки виде **в двух экземплярах**, при этом:
  - оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором нужно указать номер задачи и ее название, название учреждения образования, название команды (если команда является сборной двух или нескольких учреждений), город, автора(ов) исследования (решения);
  - **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ СОБСТВЕННЫЕ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);
  - **ОБЯЗАТЕЛЬНО** дайте четкие ссылки на литературу и другие источники, которые вы использовали при проведении исследований (в месте их использования)

---

## № 1. Уравнения для линейных функций

Под $R^n$ будем понимать множество упорядоченных $n$-ок действительных чисел. Пусть $x = (x_1,\ldots, x_n)$ и $y = (y_1,\ldots, y_n)$ – элементы $R^n$ и $\alpha$ – действительное число. Под суммой $x + y$ будем понимать покомпонентную сумму $(x_1+ y_1,\ldots, x_n+ y_n)$ элементов $x$ и $y$, а под произведением $\alpha x$ – элемент $(\alpha x_1,\ldots, \alpha x_n)$. В частности, при $n = 2$ ($n = 3$) мы получаем векторы на плоскости (в пространстве) со стандартным сложением и умножением на скаляр. Функцию $f$: $R^n \to R^n$ назовем линейной, если для любых $x, y \in R^n$ и для любых действительных $\alpha$, $\beta$ выполняется $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$. В частности, функция $\mathbf{0}(x)$, равная $(0, 0, \ldots, 0)$ при любом $x\in R^n$, является линейной. Множество всех линейных функций $f$: $R^n \to R^n$ обозначим через $L_n$. Мы будем говорить, что две линейные функции $f$, $g\in L_n$ равны, если $f(x)$=$g(x)$ для любых $x\in R^n$. Для функций $f, g$: $R^n \to R^n$ определим следующие операции: сложение $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ и умножение (композицию) $(f\cdot g)(x)=f(g(x))$. В дальнейшем аргумент $x$ будем опускать.

0.1. Конечно ли число элементов в $L_n$?

0.2. Пусть $f, g\in L_n$. Можно ли утверждать, что $f+g\in L_n, f\cdot g\in L_n$?

0.3. Верно ли, что для любых $f, g, h \in L_n$ выполняются законы: ассоциативности (т.е. $f+(g+h)=(f+g)+h$ и $f(gh)=(fg)h$), коммутативности (т.е. $f+g=g+f$ и $fg=gf$), дистрибутивности умножения по отношению к сложению (т.е. $f(g+h)=fg+fh$)? В частности, покажите, что степень $\underbrace{f\ldots f}_{n}=f^n$ корректно (однозначно) определена.

0.4. Пусть функция $e_\lambda$: $R^n \to R^n$ задана следующим образом: $e_\lambda(x) = \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, где $\lambda$ – некоторое действительное число. Является ли функция $e_\lambda$ линейной?

**I.** Будем рассматривать случай $n = 2$. Через $l$, $m$ будем обозначать некоторые натуральные числа, через $a$, $b$, $c$ – заданные линейные функции из $L_2$, $a \neq \mathbf{0}$.

1. Найдите все решения $f\in L_2$ следующих уравнений:

1.1. $f^2=f$.

1.2. $f^l=f$.

1.3. $f^l=f^m$.

1.4. $e_{\lambda_l}f^l+e_{\lambda_{l-1}}f^{l-1}+\ldots+e_{\lambda_1}f+e_{\lambda_0}=\mathbf{0}$, где функции $e_{\lambda_i}: R^2\to R^2$ определены в п. 0.4, $e_{\lambda_l}\neq\mathbf{0}$, $\lambda_i$ – действительные числа.

1.5. $af=b$.

1.6. $af=fb$.

1.7. $af=fb+c$.

1.8. $af^2=f$, $faf=f$, $f^2=afb$.

2. Найдите необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений

$af^2 + bf+c = \mathbf{0}$, $faf + bf+c = \mathbf{0}$, $f^2a + bf+c=\mathbf{0}$.

**II.** Решите задачи I.1 и I.2 для $n = 3$ и для произвольного натурального $n > 3$.

**III.** Предложите и исследуйте собственные направления или обобщения этой задачи. В частности, можно попробовать рассмотреть аналогичные вопросы для упорядоченных $n$-ок классов вычетов по модулю простого числа $p$ (или произвольного натурального числа) с аналогичными операциями сложения и умножения на класс вычетов.

## № 2. Слова

Алфавит племени Тумба-Юмба состоит из двух букв: $a$ и $b$. Два слова называются одинаковыми, если из одного слова можно получить второе слово, используя правила:

а) В любое место слова можно вставить последовательность $aaaa$ или последовательность $bb$. Аналогично из любого слова можно удалить последовательности $aaaa$ или $bb$.

б) Последовательность $bab$ можно заменить на последовательность $aaa$ и наоборот.

Пустое слово, которое будем обозначать $\varnothing$, также присутствует в языке. В данном случае по определению оно равно $aaaa$, а также $bb$. Первое правило кратко будем записывать как $a^4 = b^2 = \varnothing$, а второе — как $bab = a^3$. Пусть $x$ – слово. Через $x^0$ будем обозначать пустое слово.

1. Докажите, что слова *abaab* и *aaa* равны.
2. Докажите, что слова *abbabbbaaabb* и *abababbaabb* различны.
3. Попробуйте найти (описать) множество всех слов, равных: а) $\varnothing$, б) $a$, в) $b$.
4. Сколько существует различных слов, состоящих не более чем из трех букв? Сколько существует различных слов, состоящих не более чем из четырех букв? Сколько вообще существует различных слов?

Исследуйте аналогичные вопросы в случае, если действуют следующие правила:

5. $a^n = b^2 = \varnothing$, $bab = a^{n-1}$ (Рассмотрите этот вопрос хотя бы для некоторых $n \in \boldsymbol{N}$.)
6. $a^3 = b^2 = \varnothing$, $ab = baa$.
7. $a^5 = b^3 = \varnothing$, $(ab)^2 = \varnothing$.
8. $a^2 = a$, $b^2 = b$, $abab = ab$.
9. Найдите как можно больше $m, n, p \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ таких, что при следующих правилах $a^m = \varnothing$, $b^n = \varnothing$, $(ab)^p = \varnothing$ будет бесконечно много слов (одно слово).
10. Найдите или оцените количество слов (если их конечное число) при заданных $m, n, p \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ и при следующих правилах $a^m = \varnothing$, $b^n = \varnothing$, $(ab)^p = \varnothing$.

11. Предложите свои обобщения или направления в этой задаче и исследуйте их.

## № 3. «Пузатость» прямоугольников

**Начальная постановка.** Назовем «*пузатостью*» прямоугольника и обозначим через $\pi$ отношение длины его меньшей стороны к длине большей стороны (например, пузатость квадрата равна 1).

1.1.Разрежем квадрат произвольным образом на четыре прямоугольника двумя перпендикулярными прямыми, параллельными его сторонам. Докажите, что сумма пузатостей четырех полученных прямоугольников не меньше единицы.

1.2. Какое наименьшее и наибольшее значение может принимать сумма пузатостей этих прямоугольников?

Будем в дальнейшем обозначать *сумму пузатостей* всех прямоугольников, получаемых при разрезании исходного квадрата (или прямоугольника), через $\sigma$.

1.3. Аналогично пункту 1.1 проведем $m$ прямых, параллельных сторонам квадрата. На какое число прямоугольников они могут разрезать квадрат? Найдите максимально возможную и минимально возможную суммарную пузатость $\sigma$ всех полученных прямоугольников. Укажите точные значения или хотя бы их оценки; в случае точных значений предложите примеры, на которых они достигаются.

**Общая постановка**. Исследуйте аналогичные вопросы для прямоугольников со сторонами длиной $a$ и $b$. Для определенности здесь и далее будем считать, что сторона длиной $a$ горизонтальна, будем также обозначать такие прямоугольники $\Pi_0 = \Pi(a, b)$. Аналогично пункту 1.2 проведем $m$ прямых, параллельных сторонам прямоугольника. Покажите, что суммарная пузатость всех полученных прямоугольников не меньше пузатости $\pi(\Pi_0)$ исходного прямоугольника. Найдите максимально возможную и минимально возможную суммарную пузатость всех полученных прямоугольников (возможно, в зависимости от количества вертикальных и горизонтальных прямых). Укажите примеры, на которых эти значения достигаются.

**Важные частные случаи.**

2.1. Пусть для начала все $m$ прямых параллельны стороне $b$ прямоугольника $\Pi_0$ (т.е. все прямые вертикальны). Найдите максимально возможную и минимально возможную суммарную пузатость всех полученных прямоугольников в этом случае. Укажите точное значение или хотя бы оценку, и в случае точных значений предложите примеры, на которых они достигаются.

2.2. Для каких значений $k$ вы сможете найти такое расположение $m$ прямых, чтобы они разрезали прямоугольник на меньшие прямоугольники, сумма пузатостей которых была бы равна $k$?

2.3. Те же вопросы, что и в пунктах 2.1 и 2.2, но среди $m + 1$ прямоугольников ровно $l$ таких, у которых горизонтальные стороны $x_j$, $j = 1,2, \ldots, l$, не меньше $b$.

2.4. Те же вопросы, что и в пунктах 2.1 – 2.3, но кроме $m$ вертикальных прямых проведены еще одна, две, …, $n$ горизонтальных прямых, делящих сторону $b$, на две, три, …, $n + 1$ части.

**Возможные обобщения.** По аналогии с пузатостью прямоугольника попробуйте ввести понятие пузатости для других выпуклых фигур на плоскости (треугольника, параллелограмма и т.п.), а также в пространстве и исследуйте их свойства. Предложите свои направления в этой задаче и изучите их.

## № 4. Обходительные многоугольники

Выпуклый многоугольник назовем обходительным, если на каждой его стороне и диагонали можно выбрать направление (одно из двух возможных) так, что сумма полученных векторов равна нулю.

0) Приведите пример обходительного четырёхугольника.
1) Может ли $n$-угольник не быть обходительным, если $n$ нечетно?
2) Для каких $n$ существуют необходительные $n$-угольники?
3) Опишите все обходительные четырехугольники.
4) Все ли правильные многоугольники обходительны?
5) Опишите все (или как можно больше) необходительные шестиугольники.
6) Приведите критерий обходительности $n$-угольника.
7) Рассмотрите пункты, аналогичные пунктам 1-6 в пространстве (т.е. замените многоугольник многогранником).
8) Предложите свои обобщения и направления в этой задаче и исследуйте их.

## № 5. Поворот графиков

Обозначим через $\alpha_n$ угол в $\dfrac{\pi}{n}$ радиан ($\dfrac{180}{n}$ градусов), $n \in \boldsymbol{N}$. Во всех пунктах рассматриваются функции, заданные на $\boldsymbol{R}$. Под поворотом графика относительно точки $O$ будем понимать поворот каждой точки графика относительно точки $O$.

1. Сколько решений может иметь уравнение $f(x)=0$, если функция $f$ удовлетворяет следующему условию: существует натуральное $n \geq 2$ такое, что график функции $y = f(x)$ не изменяется при повороте на $\alpha_n$ относительно начала координат?
2. Для каждого натурального значения $n$ найдите непрерывные функции такие, что их график не изменяется при повороте на $\alpha_n$ относительно начала координат, либо докажите, что таких функций не существует.

3. Докажите, что график функции $f$ не изменяется при повороте на $\alpha_2$ относительно начала координат тогда и только тогда, когда функция $f$ удовлетворяет уравнению $f(f(x)) = -x$ для любого действительного $x$. Докажите, что любое решение приведенного выше функционального уравнения не может иметь конечное число точек разрыва.
4. Пусть $y = f(x)$ – кусочно-линейная функция, график которой не меняется при повороте на $\alpha_n$ относительно начала координат, причем один из кусков ее графика имеет угловой коэффициент $k$. Чему может равняться $k$? Попробуйте найти все возможные значения или хотя бы указать условия, которым должны удовлетворять значения $k$ при заданном $n$.
5. Существуют ли а) кусочно-линейные функции; б) не кусочно-линейные функции такие, что их график не изменяется при повороте относительно начала координат на 1) $\alpha_2$, 2) $\alpha_4$, 3) $\alpha_3$, 4) $\alpha_n$ при некотором $n \in \boldsymbol{N}$?
6. На графике функции $f$ существуют две различные точки $O_1$ и $O_2$ такие, что график функции $f$ переходит сам в себя при повороте на угол $\alpha_n$ относительно каждой из точек $O_1$ и $O_2$. При каких значениях $n$ функция $f$ может быть непрерывной? При $n = 1$ опишите все такие функции, если точка $O_1$ является началом координат.
7. Найдите все функции, удовлетворяющие следующим условиям: а) график функции не изменяется при повороте на $\alpha_1$ относительно любой точки графика функции; б) существует интервал, на котором функция непрерывна. Решите данный пункт без условия б).
8. Существуют ли функции, удовлетворяющие следующим условиям: а) график функции не изменяется при повороте на $\alpha_n$ относительно любой точки графика функции; б) существует интервал, на котором функция непрерывна.
9. Предложите свои обобщения или направления в этой задаче и исследуйте их.

**№ 6. Дороги, которые выбирает мэр**

В городе Н-ске $N + M$ улиц: $N$ улиц идут строго с запада на восток, $M$ улиц идут строго с севера на юг (по всем улицам движение разрешено в обе стороны). Все горизонтальные улицы пересекаются со всеми вертикальными, образуя таким образом $N \times M$ перекрёстков. (Для краткости будем говорить, что город имеет размеры $N$ на $M$).

Новый мэр пообещал осуществить обновление улиц города путем их асфальтирования в соответствии с новыми технологиями. Однако мэр не хочет, чтобы в городе появился замкнутый маршрут, проходящий только по вновь асфальтированным перекрёсткам, потому что тогда автомобилисты смогут ездить слишком быстро, что может повлечь за собой много ДТП. Поэтому главному архитектору поставлена задача: каждый месяц асфальтировать ровно один перекрёсток, а если соседний перекресток по какой-то улице уже был заасфальтирован ранее, то дорога между этими двумя перекрестками тоже асфальтируется в этом месяце (если таких перекрестков несколько, то асфальтируются все такие дороги).

Какое наибольшее число месяцев архитектор города может асфальтировать каждый месяц новый перекрёсток с прилежащими дорогами, не создав в городе ни одного асфальтированного замкнутого маршрута?

1. Решите задачу для города размерами 2 на 2, 2 на 3, 3 на 3, 3 на 4.
2. Решите задачу для города размерами 2 на $M$, т. е. дайте оценку и приведите алгоритм построения заасфальтированной сети дорог, в которой она достигается.

3. Решите задачу для города размерами 3 на $M$.
4. Решите задачу или дайте как можно более точную оценку для города размерами 4 на М, 5 на $M$, 6 на $M$.
5. Решите задачу или дайте верхнюю и нижнюю оценки для города размерами $N$ на $M$, а также исследуйте точность (достижимость) Ваших оценок.
6. Введём прямоугольную систему координат с началом в левом нижнем углу прямоугольного города $N$ на $M$ и осями вдоль сторон этого прямоугольника. Рассматривая различные подмножества улиц этого города, можно получать города с формой, отличной от прямоугольной. Например, решите задачу для города

   6.1. в форме буквы $L$ (выбираем $K$ улиц, ближайших к левой стороне прямоугольника и параллельных ей, и $K$ улиц, ближайших к нижней стороне прямоугольника и параллельных ей),

   6.2. в форме «бублика» (выбираем $K$ улиц, ближайших к каждой стороне прямоугольника и параллельных выбранной стороне) и т. д.

   Для простоты можно начать рассмотрение с $K = 2, 3, \ldots$
7. Решите пункты 1-6, если запрещено создавать не произвольный замкнутый маршрут, а маршрут в форме прямоугольника (со сторонами с севера на юг и с запада на восток)

**№ 7. Делимость подмножеств**

**I.** Введем в рассмотрение функцию от двух аргументов $M : \mathrm{N} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}_0$ ($\mathrm{N}_0 = N \cup \{0\}$) такую, что $M(k, l)$ равно такому минимальному натуральному числу $m$, что в любом $m$-элементном множестве целых чисел всегда найдется $k$ различных чисел, что их сумма будет делиться на $l$. Если же такого минимального $m$ не существует (т.е. какое бы $m$ не выбрали, всегда найдется такое $m$-элементное множество целых чисел, что никакие $k$ его элементов в сумме не дают число, делящееся на $l$), то $M(k,l) = 0$.

**Примеры:** $M(1, 2) = 0$, другими словами, для любого натурального $m$ существует $m$-элементное множество, например, состоящее только из нечетных чисел так, что никакой его элемент не делится на 2;

$M(2, 3) = 0$, другими словами, для любого натурального $m$ можно выбрать $m$-элементное множество такое, что никакие два его элемента не дают сумму, делящуюся на 3, например, множество, состоящее из чисел, дающих остаток 1 при делении на 3;

$M(3, 3) = 5$, другими словами, из любого 5-элементного множества целых чисел всегда можно выбрать три числа, сумма которых делится на 3 (докажите это); в то же время из любого меньшего множества, например, 4-элементного, такого, вообще говоря сделать нельзя, пример – множество $\{0, 1, 3, 4\}$.

**Вопросы для исследования:**

1) Найдите все натуральные $l$, для которых $M(1,l) > 0$.
2) Найдите критерии выполнения неравенства $M(k,l) > 0$ или хотя бы необходимые или достаточные условия (с обоснованием).
3) Для фиксированного натурального $l$ обозначим $K_l = \{k \in \mathrm{N} | M(k,l) > 0\}$ – множество таких $k$, что $M(k,l) > 0$. Исследуйте монотонность функции $M(k,l)$ по первому аргументу при $k \in K_l$.
4) Докажите, что для любого $n \in \mathrm{N} : M(2^n, 2^n) \leq 2^{n+1}$. Является ли данная оценка достижимой? Если нет, то попробуйте ее улучшить.

5) Докажите, что для любого $n \in N$: $M(n,n) \le 2n-1$. При каких $n$ достигается равенство?
6) Найдите точное значение для $M(k,l)$ хотя бы для небольших значений $k$ и $l$ ($k,l \le 10$). Если, в общем случае, найти выражение для $M(k,l)$ не удастся, то оцените значение функции $M(k,l)$ сверху и снизу.

**II.** Рассмотрим функцию от двух аргументов $\widetilde{M}: \mathrm{N} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}_0$, $\widetilde{M}(k,l)$ равно такому минимальному натуральному числу *m*, что в любом *m*-элементном множестве целых чисел всегда найдется *k* различных чисел, что некоторая их линейная комбинация с коэффициентами 1 или -1 будет делиться на *l* (т.е. часть слагаемых берется с множителем 1, часть – с множителем -1, и такая сумма делится на *l*). Если же такого минимального *m* не существует, то $\widetilde{M}(k,l) = 0$.

Для функции $\widetilde{M}(k,l)$ исследуйте вопросы, аналогичные части **I.**

**III.** Пусть задано натуральное число $l \in \mathrm{N}$. Обозначим $A \subseteq \{1, 2, \ldots, l-1\}$. Рассмотрим функцию $M_A(k, l)$, равную такому минимальному натуральному числу *m*, что в любом *m*-элементном множестве целых чисел *B* всегда найдется *k* различных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(x_i \in B, x_i \ne x_j, i \ne j)$ и *k* коэффициентов $\alpha_i \in A$, что $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ делится на *l*. В частности, для функции $\widetilde{M}(k,l)$ из части **II** этой задачи коэффициенты $\alpha_i$ выбираются из множества $\{1, l-1\}$.

Исследуйте вопросы, аналогичные части **I,** хотя бы для некоторых *l* и множеств *A*.

7) Найдите все (или хотя бы некоторые) пары чисел *k* и *l*, если такие существуют, что для любого $A \subseteq \{1, 2, \ldots, l-1\}$ выполняется $M_A(k, l) = 0$.

**IV.** Предложите свои направления и обобщения задачи и исследуйте их.

## № 8. Системы неравенств

1. Найдите множество всех значений $p, q \in R$ таких, что существует такое положительное число $x \in R$, что выполняется неравенство $\frac{x^2}{p} < x < \frac{x^3}{q}$.
2. Найдите все значения $p \in R$ такие, что существуют такие положительные числа $x_1, x_2 \in R$, что выполняется неравенство $\frac{x_1^2 + x_2^2}{p} < x_1 + x_2 < x_1^3 + x_2^3$.
3. Найдите все значения $q \in R$ такие, что существуют такие положительные числа $x_1, x_2 \in R$, что выполняется неравенство $x_1^2 + x_2^2 < x_1 + x_2 < \frac{x_1^3 + x_2^3}{q}$.
4. Найдите все значения $p, q \in R$ такие, что существуют такие положительные числа $x_1, x_2 \in R$, что выполняется неравенство $\frac{x_1^2 + x_2^2}{p} < x_1 + x_2 < \frac{x_1^3 + x_2^3}{q}$.
5. Найдите все значения $p, q \in R$ такие, что существуют такие положительные числа $x_1, x_2, x_3 \in R$, что выполняется неравенство $\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{p} < x_1 + x_2 + x_3 < \frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{q}$.

6. Найдите все значения $p,q \in R$ такие, что существуют такое натуральное число $n$ и такие положительные числа $x_1, x_2, ..., x_n \in R$, что выполняется неравенство: $\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{p} < x_1 + x_2 + ... + x_n < \frac{x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3}{q}$.
7. Пусть положительные числа $x_1, x_2, ..., x_n$ удовлетворяют неравенствам
$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 < \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{2} < \frac{x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3}{4}.$$
   a) Докажите, что $n > 50$.
   b) Приведите пример чисел, удовлетворяющих этим неравенствам.
   c) При каком наименьшем $n$ такие числа существуют?
8. Пусть $\alpha$, $\beta$, $p$, $q$ – некоторые наперед заданные действительные числа. При каких натуральных значениях $n$ найдутся $n$ положительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n \in R$, для которых будет выполняться неравенство:
$$\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{p} < x_1 + x_2 + ... + x_n < \frac{x_1^\beta + x_2^\beta + ... + x_n^\beta}{q}.$$
9. Рассмотрите общую постановку хотя бы для некоторых других значений $n$, $\alpha$, $\beta$, $p$, $q$ и исследуйте ее. Предложите свои обобщения задачи.

**№ 9. Гладкость функций**

Пусть задана функция $f:[0,1] \to R$ и положительное действительное число α. Будем говорить, что функция $f$ является *α-гладкой*, если существует постоянная $M_\alpha$ такая, что $|f(x) - f(y)| \le M_\alpha |x-y|^\alpha$ для любых $x, y \in [0,1]$. Множество всех α-гладких функций обозначим через $C^\alpha$. В частности, любая константа $f(x) \equiv c$ является α-гладкой при любом $\alpha > 0$, а функция $f(x) = \sqrt{x}$ не является $\alpha$-гладкой при $\alpha > \frac{1}{2}$. *Показателем гладкости* функции $f$ назовем величину $\sup\{\alpha > 0 \mid f \in C^\alpha\}$, полагаем $\sup\varnothing = 0$, $\sup(0,\infty) = \infty$.

1. Докажите, что все функции, принадлежащие множеству $C^\alpha$ при $\alpha > 0$, являются непрерывными.

2. Существует ли непрерывная функция $f$ с показателем гладкости, равным нулю?

3. Пусть $\alpha > 1$. Найдите все функции, принадлежащие множеству $C^\alpha$.

4. Какие значения может принимать показатель гладкости функции $f:[0,1] \to R$, для которой: а) в каждой точке $x \in (0,1)$ существует конечная производная $f'(x)$? б) существует постоянная $L$ такая, что $|f'(x)| \le L$ для любых $x \in (0,1)$?

5. Пусть $f, g \in C^\alpha$, $\alpha > 0$. Можно ли утверждать, что функции $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (при условии $g(x) \ne 0$ для любых $x \in [0,1]$), $f \circ g = f(g(x))$ (при условии, что $g(x) \in [0,1]$ для любых $x \in [0,1]$) принадлежат множеству $C^\alpha$?

6. Найдите показатель гладкости функции $f$, где

6.1. $f$ – многочлен;

6.2. $f(x) = x^{\beta}$, где $\beta$ – положительная постоянная;

6.3. $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

7. Исследуйте аналогичные задачи для функций $f : R \to R$, а также сформулируйте и изучите многомерные аналоги задачи.

## № 10. Количество треугольников и не только!

**Исходная постановка.** 1.1. На каждой стороне треугольника АВС отмечено по 9 точек, разбивающих эти стороны на 10 равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках, взятых по одной на каждой стороне. Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна сторонам исходного треугольника?

1.2. Та же задача, что и в пункте 1, но на каждой стороне взято по $n$ точек.

1.3. Та же задача, что и в пункте 1, но на двух сторонах взято по $n$ точек, а на третьей стороне $m$ точек.

1.4. Та же задача, что и в пункте 1, но на трех сторонах треугольника взято $n$, $m$ и $k$ точек соответственно.

**Общая постановка.** Предложите свои направления или обобщения в этой задаче и исследуйте их (возможно, например, исследовать подобные задачи для квадратов или параллелограммов, а также для некоторых видов многогранников в пространстве). В каждом пункте (или в обобщениях) интересно рассмотреть случаи даже небольших значений параметров. Например:

2.1. На каждой стороне выпуклого четырехугольника отмечено по 9 точек, разбивающих эти стороны на 10 равных частей. Рассмотрим всевозможные четырехугольники с вершинами в отмеченных точках, взятых по одной на каждой стороне. Сколько среди этих четырехугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна диагоналям исходного четырехугольника?

2.2. Сколько четырехугольников, у которых только одна сторона параллельна какой-нибудь диагонали? А сколько четырехугольников, у которых две стороны параллельны диагоналям? Три стороны параллельны диагоналям?

2.3. Исследуйте случаи, аналогичные пунктам 1.2 – 1.4.

3. Рассмотрите задачи, аналогичные задачам пунктов 2.1 – 2.3, для правильного пятиугольника.

## № 11. Треугольники в графах

*Обыкновенным графом* называется пара $G = (V, E)$, где $V$ – некоторое непустое конечное множество, $E$ – множество неупорядоченных пар различных элементов из $V$. Элементы множества $V$ называются *вершинами* графа, элементы множества $E$ – его *ребрами*. Множество вершин графа $G$ будем обозначать через $V(G)$, множество ребер – $E(G)$, число вершин – $n(G)$, которое также называется порядком графа, число ребер – $m(G)$. Говорят, что две вершины $u$ и $v$ графа *смежны*, если множество $\{u, v\}$ является ребром и *не смежны* в противном случае. Множество вершин, смежных с заданной вершиной, называется *окружением* этой вершины. *Дополнением* (*дополнительным графом*) к графу $G = (V, E)$ называется граф $\overline{G}$, у которого множество вершин то же, что у $G$, и две различные вершины смежны в графе $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они несмежны в графе $G$. Тройка $\{u, v, w\}$ вершин графа называется *треугольником*, если неупорядоченные пары $\{u, v\}$, $\{u, w\}$, $\{v, w\}$ являются ребрами этого графа. Обозначим через $t(G)$ число треугольников в графе $G$.

**Начальные задачи.**

1) Найдите число $t(G)$ треугольников в полном графе $G$ с $n$ вершинами.

2) Пусть граф $G$ содержит $n$ вершин $v_1, v_2, ..., v_n$, причем пара $\{v_i, v_j\} \in E$ тогда только тогда, когда, $|i-j| \neq 1$ или $|i-j| \neq n-1$ (геометрически этот граф можно представить как выпуклый многоугольник, в котором проведены все диагонали, а все стороны стерты). Найдите число $t(G)$ треугольников в таком графе.

3) Найдите число $t(G)$ треугольников в полном двудольном графе $G$, доли которого содержат $m_1$ и $m_2$ вершин соответственно, а также найдите число $t(\overline{G})$ треугольников в дополнении к такому графу.

4) Те же вопросы, что и в пункте 3) для трехдольного графа, четырехдольного графа и т.п.

**Сложные задачи.**

5) Проверьте, что для графов из пп. 1) – 4) и их дополнений имеет место следующая формула

$$t(G) + t(\overline{G}) = C_n^3 - m(n-2) + \sum_{x \in V(G)} C_{\deg x}^2, \tag{1}$$

где $n = n(G)$, $m = m(G)$ и $\deg x$ – степень вершины $x$ в графе $G$, т. е. число вершин графа $G$, смежных с вершиной $x$.

6) Докажите формулу (1) в общем случае.

7) Используя формулу (1), попытайтесь найти достижимую нижнюю оценку на величину $t(G) + t(\overline{G})$ в терминах числа $n = n(G)$ вершин графа $G$. Приведите примеры графов, подтверждающих достижимость найденной оценки.

8) Предложите свои направления и обобщения этой задачи и исследуйте их.

**Возможные направления.**

9) Пусть $G$ – кубический граф, т. е. степень каждой его вершины равна 3, который является графом пересечений ребер некоторого другого графа $H$. Другими словами, $V(G) = E(H)$ и две вершины в графе $G$ смежны в том и только в том случае, если соответствующие им ребра в графе $H$ имеют общую вершину. Попытайтесь найти точное значение параметра $t(\overline{G})$ в терминах числа $n = n(G)$ вершин графа $G$ или получите оценки этого параметра.

10) Пусть $P$ – класс графов. Граф $G$ назовем *локально $P$-графом*, если для любой его вершины подграф, порожденный окружением этой вершины, принадлежит классу $P$. (*Подграф, порожденный окружением некоторой вершины v, – это граф, вершинами которого являются все вершины из окружения вершины v, а ребрами – все ребра исходного графа, соединяющие вершины, принадлежащие окружению вершины v*).

Обозначим через $Local(P)$ класс всех локально $P$-графов и введем в рассмотрение следующие параметры:

$$t_{\min}(P, n) = \min\{t(G) : G \in Local(P),\ n = n(G)\},$$

$$t_{\max}(P, n) = \max\{t(G) : G \in Local(P),\ n = n(G)\}.$$

Для различных классов $P$ найдите точные значения параметров $t_{\min}(P, n)$ и $t_{\max}(P, n)$ или предложите оценки этих параметров. В качестве классов $P$ можно рассмотреть следующие классы графов: простые циклы, простые цепи, деревья, ациклические графы, двудольные графы, граф $r$-мерного булева куба, $k$-регулярные графы ($k \geq 1$), связные графы, несвязные графы, гамильтоновы графы, планарные графы или любые другие известные классы графов. Используя результаты проведенного исследования, установите необходимые условия существования локально $P$-графов. В частности, докажите следующие утверждения: 1) не существует локально $k$-регулярного графа с $m$ ребрами в случае, когда оба параметра $k$ и $m$ не делятся на 3; 2) если для заданного графа $H$ граф $G$ является локально $H$-графом и $m(H)$ не делится на 3, то $n(G)$ делится на 3.

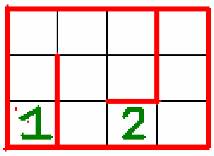
## № 12. Роботы в лабиринте

В этой задаче речь пойдет о лабиринтах и заблудившихся в них роботах. Будем рассматривать лабиринты двух видов.

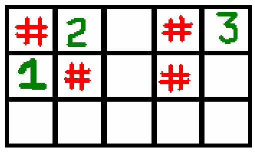
Лабиринт первого вида – это клетчатый прямоугольник $N \times M$, в котором между некоторыми соседними клетками стоят стенки, препятствующие прохождению. На картинке примера 1 стены выделены жирной линией.

Лабиринт второго вида так же представляет собой клетчатый прямоугольник $N \times M$, но теперь предполагается, что некоторые клетки свободны, а некоторые – заняты. Все, что находится за пределами прямоугольника, предполагается занятым. На картинке примера 2 символ '#' означает занятую клетку (любое непроходимое препятствие).

Пример 1.




Пример 2.




Как всегда, из одной незанятой клетки можно перейти в другую незанятую клетку при условии, что они граничат по стороне (и между ними нет стенки в случае лабиринта первого вида). *Путем* между двумя клетками называется последовательность незанятых клеток, ведущая от первой клетки до второй. *Длиной пути* называется количество движений (ходов), которые необходимо совершить, чтобы попасть из первой клетки во вторую. *Кратчайшим путем* называется путь между двумя клетками, длина которого минимальная из всех возможных.

В лабиринте на некоторых клетках стоят роботы. Известно, что между любыми двумя клетками с роботами существует путь. Везде, если не оговорено противное, считается, что мы видим лабиринт, т.е. знаем координаты роботов и расположение препятствий. У каждого робота есть передатчик, на который мы можем передавать команды. К сожалению, мы можем передавать сигнал лишь всем роботам одновременно. Существуют команды (и соответственно операции) четырех видов:

"U" – все роботы сдвигаются на одну клетку вверх.

"R" – все роботы сдвигаются на одну клетку вправо.

"D" – все роботы сдвигаются на одну клетку вниз.

"L" – все роботы сдвигаются на одну клетку влево.

Если перед роботом оказалось препятствие по заданному направлению, то он остается на месте. Во всех пунктах, которые последуют далее, предлагается рассматривать лабиринты обоих видов.

**1.*Исходная постановка задачи:***

1.1. Докажите, что существует последовательность команд, приводящая всех роботов в одну клетку. Для первого примера свести их в одну клетку позволяет, например, последовательность команд "UURDDRR" или "LUUL". Можно показать, что вторая последовательность является оптимальной с точки зрения количества команд. Для второго примера свести их в одну клетку поможет, например, последовательность “RDDLLLL”.

1.2. Можно ли осуществить задуманное, если мы знаем только форму лабиринта, т.е. расположение препятствий, но не знаем координаты роботов? Под осуществлением задуманного предполагается предъявление конечной последовательности команд, которая сведет роботов в одну точку независимо от их изначального месторасположения.

**2. Оценивание количества команд (операций):**

2.1. Докажите, что двух роботов можно свести в одну клетку не более, чем за $N^2M^2$ операций. Попробуйте доказать оценку $cN^2M^2$, $c < 1$. Верна ли эта оценка для $K$ роботов, $K > 2$? Если нет, то на какую константу $c$ можно умножить выражение $N^2M^2$, чтобы это стало верным?

2.2. Верно ли, что двух роботов можно свести в одну клетку не более, чем за $cNM$ операций, где $c$ – некая заранее определенная константа? Покажите, что для $c < 1$ это заведомо неверно, то есть существуют такие лабиринты и такие расположения роботов в них, что $cNM$ операций, $c < 1$, будет недостаточно. Также попробуйте исследовать этот вопрос, если роботов $K > 2$.

2.3. Обозначим за $S$(A, B) кратчайшее расстояние между роботами A и B, т.е. длину кратчайшего пути между клетками, в которых они стоят, а за $F$(A, B) длину минимальной последовательности операций, приводящее их в одну клетку. Докажите, что:

2.3.1. Если $S(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 1$, то $F(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \le \max(N, M)$

2.3.2. Если $S(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \le 3$, то $F(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \le M + N$.

Докажите еще какие-нибудь похожие оценки. Верно ли, что всегда выполнено неравенство $F(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \le S(\mathrm{A}, \mathrm{B})\cdot(M + N)$?

2.4. Придумайте какие-нибудь стратегии (возможно, не оптимальные) и покажите, как они работают. Попробуйте оценить их эффективность (например, отношение количества команд к оптимальному).

**3. Близкие сюжеты:**

Назовем две клетки *взаимными,* если роботов, стоящих на них, какой-то последовательностью, состоящей из букв “U”, ”R”, ”D” и ”L” мы можем обменять местами.

3.1. Приведите примеры лабиринтов и взаимных клеток в них.

3.2. При каких условиях можно утверждать существование взаимных клеток в лабиринте?

3.3. Верно ли, что если клетки X и Y взаимны, Y и Z взаимны, то X и Z также взаимны?

**4. Предложите свои направления и обобщения задачи и исследуйте их.**

## № 13. Функциональные уравнения над конечными множествами

**Предварительное замечание.** Во всех пунктах этой задачи интерес представляет исследование как случая произвольных $n$ и $m$, так и нетривиальных частных случаев, например, при $n = m$ или даже для частных небольших значений $n$ и $m$. Кроме того, наряду с точными значениями числа решений представляют интерес и нетривиальные оценки для числа решений

**I.** Пусть $n$ – натуральное число, большее 1. Через $\mathbb{Z}_n$ обозначим множество $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ классов вычетов по модулю $n$, где $\overline{a} = \{a + nt | t \in \mathbb{Z}\}$, $a \in \mathbb{Z}$. Иными словами, $\overline{a}$ – множество всех целых чисел, которые дают тот же остаток при делении на $n$, что и число $a$. Для элементов множества $\mathbb{Z}_n$ вводятся операции сложения и умножения следующим образом: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}$, $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a\cdot b}$. Например, $\overline{3}+\overline{4}=\overline{2}$, $\overline{2}\cdot\overline{4}=\overline{3}$ при $n=5$. Через $G(\mathbb{Z}_n)$ обозначим множество всех классов вычетов $\overline{a}$ по модулю $n$, таких, что числа $a$ и $n$ взаимно просты. Например, $G(\mathbb{Z}_6)=\{\overline{1},\overline{5}\}$. Через $\mathbb{X}_n$ будем обозначать одно из множеств $\mathbb{Z}_n$ или $G(\mathbb{Z}_n)$. Пусть $m$ – натуральное число, большее 1.

Найдите число функций $f\colon\mathbb{X}_n\to\mathbb{X}_m$, которые при всех $x,y\in\mathbb{X}_n$ удовлетворяют следующим функциональным уравнениям (или системам):

1) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, где $\mathbb{X}_n=\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{X}_m=\mathbb{Z}_m$;

2) $\begin{cases} f(x+y)=f(x)+f(y), \\ f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y), \end{cases}$ где $\mathbb{X}_n=\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{X}_m=\mathbb{Z}_m$;

3) $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$, где $\mathbb{X}_n=G(\mathbb{Z}_n)$, $\mathbb{X}_m=G(\mathbb{Z}_m)$;

4) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, где $\mathbb{X}_n=\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{X}_m=G(\mathbb{Z}_m)$;

5) $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$, где $\mathbb{X}_n=G(\mathbb{Z}_n)$, $\mathbb{X}_m=\mathbb{Z}_m$.

**II.** Пусть $A$ и $B$ – два непустых конечных множества, состоящих соответственно из $n$ и $m$ элементов. Через $2^A$ и $2^B$ обозначим множества всех подмножеств, включая пустое подмножество, соответственно множеств $A$ и $B$. На множествах $2^A$ и $2^B$ введем операции сложения и умножения: $X+Y=X\Delta Y$, $X\cdot Y=X\cap Y$, где $X\Delta Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$, $X,Y\in 2^A$ или $2^B$. Найдите число функций $g\colon 2^A\to 2^B$, которые при всех $X,Y\in 2^A$ удовлетворяют функциональным уравнениям:

1) $g(X+Y)=g(X)+g(Y)$;

2) $\begin{cases} g(X+Y)=g(X)+g(Y), \\ g(X\cdot Y)=g(X)\cdot g(Y). \end{cases}$