XVII республиканский турнир юных математиков
(8-13 декабря 2015 г.)

Письменный (нулевой) тур

9 декабря 2015 года

ВНИМАНИЕ:

1) **время решения 3 час. = 180 мин.**;

2) **исследование по каждой задаче необходимо оформить в отдельной тетради** и подписать название команды, город, фамилию автора(ов);

3) **на первом листе** каждой тетради сделайте резюме своего исследования соответствующей задачи – то есть

– отдельно, четко и лаконично сформулируйте основные результаты вашего исследования этой задачи;

– оформление самого решения (оформление результатов – доказательств, примеров и других элементов исследования – начинайте **со второго листа тетради**).

4) интерес представляет как максимально полное решение авторской постановки, так и ваши собственные идеи, обобщения, направления (*утверждения, обоснования, гипотезы; разрешаются импровизации с конкретными результатами*);

Задача 1. Остатки и концовки – 2

1) а) Найти последнюю цифру чисел 9^{9^9}, 2^{3^4}, $(2^3)^4$.

б) Найти две последние цифры чисел 2^{999}, 3^{999}.

в) Найти две последние цифры числа $14^{14^{14}}$.

г) Здесь и далее во всех пунктах попробуйте рассмотреть более общие случаи.

2) а) Найти последнюю цифру числа $((((7^7)^7)^7)^{\cdot^{\cdot}})^7$ (возведение в степень 7 повторяется 1000 раз).

б) Найти две последние цифры этого числа.

3) а) Найти последнюю цифру числа $7^{7^{\cdot^{\cdot^{7^7}}}}$ (возведение в степень 7 повторяется 1000 раз).

б) Найти две последние цифры этого числа.

4) Найти пять последних цифр числа $9^{9^{\cdot^{\cdot^{9^9}}}}$ (возведение в степень 9 повторяется 1000 раз).

5) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 2. Площади многоугольников с вершинами в узлах решеток

I. Целочисленные квадратные решетки

Рассмотрим на плоскости систему прямых, заданных уравнениями $x = i$, $y = j$, где i и j – целые числа. Эти прямые образуют решетку квадратов или целочисленную (квадратную) решетку. Вершины этих квадратов, т.е. точки пересечения прямых, называют узлами решетки. Площадь каждого квадрата решетки равна 1.

1. Докажите, что площадь прямоугольника с вершинами в узлах решетки и сторонами, проходящими по линиям решетки, равна $n + m/2 - 1$, где n – число узлов решетки, лежащих строго внутри прямоугольника, а m – число узлов на границе, включая вершины.

2. Проверьте (докажите или опровергните) аналогичное утверждение для:

а) многоугольников с вершинами в узлах решетки и сторонами, проходящими по линиям решетки, имеющего вид «уголка» (см. рис. 1);

б) многоугольников с вершинами в узлах решетки и сторонами, проходящими по линиям решетки, более сложного вида (например, как рис. 2);

в) треугольника, у которого две или одна сторона проходят по линиям сетки;

г) произвольного треугольника с вершинами в узлах сетки.

3. Попробуйте разобрать случай произвольного многоугольника с вершинами в узлах сетки (стороны не обязательно идут по линиям сетки).

4. Рассмотрите вопросы пунктов **2.а) – г) и 3**, когда внутри многоугольника есть «дырка» (или несколько дырок, т.е. вырезан(ы) прямоугольник(и) или многоугольник(и) с вершинами в узлах сетки, рис. 3).

5. Рассмотрите эти же вопросы, когда внутри многоугольника есть «дырка» (дырки), а в нее (них) вставлен(ы) новый(ые) прямоугольник(и) (рис. 4).

6. Попробуйте рассмотреть другие обобщения этих вопросов.

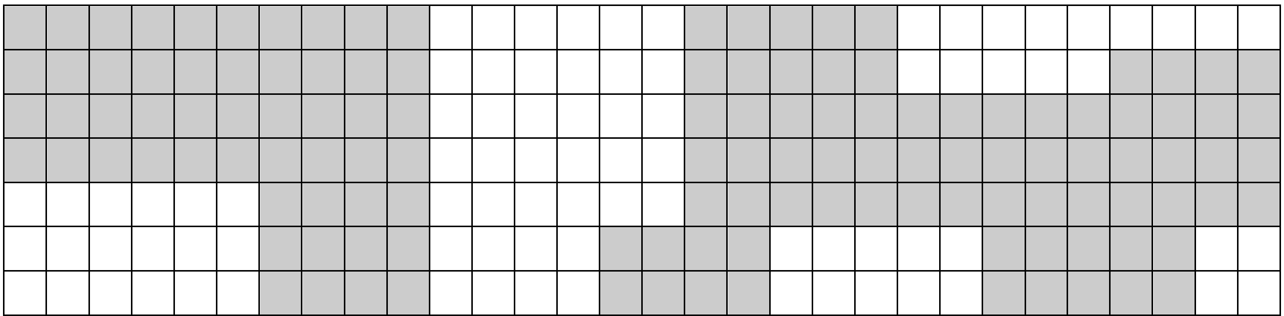

Рис. 1 **Рис. 2**

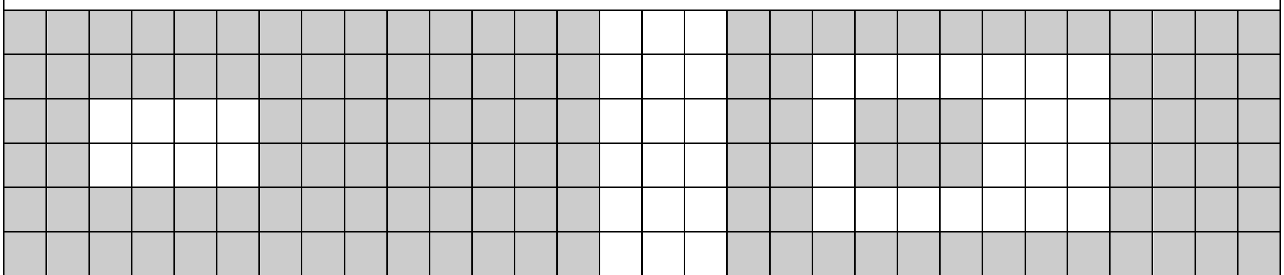

Рис. 3 **Рис. 4**

II. Рассмотрите подобные задачи на целочисленных решетках, состоящих из равносторонних треугольников площади 1. Здесь тоже возможны разные случаи:

1) все стороны многоугольника(ов) лежат на линиях сетки;

2) стороны многоугольников не обязательно лежат на линиях сетки.

III. Предложите свои обобщения или направления в этой задаче и исследуйте их.

Задача 3. Построение равнобедренных треугольников и не только!

I. *Основная задача*.

А) В плоскости равностороннего треугольника ABC найдите все такие точки P, что все треугольники ABP, BCP и CAP являются равнобедренными. (*Укажите максимально возможное количество таких точек, их расположение, а также докажите, что других таких точек в плоскости треугольника ABC нет*.)

Б) Решите аналогичную задачу для квадрата, правильного пятиугольника, шестиугольника, семиугольника и т.д.

В) Предложите свои обобщения или направления исследования в это задаче и изучите их.

II. Исследуйте вопрос пункта I.А) для произвольного треугольника, четырехугольника и т.п. (рассмотрите хотя бы частные случаи треугольников).

III. А) Существует ли треугольник ABC, для которого найдется такая точка P, что все треугольники ABP, BCP и CAP являются равносторонними?

Б) Найдите все такие n, для которых существует n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ и точка P в плоскости n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ такие, что все треугольники A_1A_2P, A_2A_3P, …, A_nA_1P являются равносторонними.

IV. Предложите свои направления исследования в этой задаче и изучите их.