Исследовательские задания
XVII республиканского турнира юных математиков

Внимательно прочтите эти указания – в них содержится важная общая информация о характере заданий турнира, о том, что значит решить (исследовать) задания турнира и об их оформлении!

Обращаем ваше **ВНИМАНИЕ** на то, что предлагаемые задания (далее – задачи) носят исследовательский характер, наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- необходимо **по возможности максимально полно** исследовать каждую задачу, но в то же время нужно иметь в виду, что в ряде задач интерес представляют даже ***отдельные частные случаи*** *заданий (их пунктов или небольших значений параметров)*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) вы *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно рассмотреть свои направления*, причем ваши исследования **НЕОБЯЗАТЕЛЬНО** должны совпадать с предложениями авторов;
- **ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИЛЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО КАЖДОЙ ЗАДАЧЕ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО** в распечатанном виде **в двух экземплярах** (до 30 стр. формата А4), а также в электронной форме (образец названия файлов «Brest-gym99-2015-problem7-predvar», объем до 3 MB, если иное не согласовано с оргкомитетом), при этом:
  - оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором нужно указать номер задачи и ее название, название учреждения образования, название команды (если команда является сборной двух или нескольких учреждений), город, автора(ов) исследования (решения);
  - **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ СОБСТВЕННЫЕ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы);
  - **ОБЯЗАТЕЛЬНО** дайте четкие ссылки на литературу и другие источники, которые вы использовали при проведении исследований (в месте их использования).

Примечание. Тексты исследовательских заданий в электронном виде представлены также на сайте **http://www.uni.bsu.by**. В случае обнаружения опечаток, двусмысленностей и других неточностей, а также в случае возникновения вопросов по условиям просим обращаться по адресам электронной почты (или по телефонам), указанным выше.

Задача 1. Карлсон и варенье

I. а) У Карлсона есть 27 банок с вареньем. В банках находится 1, 2, 3, …, 27 литров варенья соответственно. На завтрак Карлсон может съесть одно и то же целое число литров варенья из любых двух банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье. Может ли Карлсон съесть все варенье, если вначале было 29 банок, в которых содержалось 1, 2, …, 29 литров варенья?

б) Попробуйте указать все натуральные значения n, при которых Карлсон может съесть варенье из n банок, в которых содержатся 1, 2, 3, …, n литров варенья. При этом если при каких-то n он может это сделать, опишите алгоритм «съедания», а при остальных докажите, что такое невозможно. В первом случаем при каждом n постарайтесь найти минимально возможное количество завтраков («съеданий»), за которое Карлсон может съесть варенье.

в) Попробуйте доказать, что алгоритм «съедания», предложенный вами в предыдущем пункте является оптимальным с точки зрения минимальности количества операций (под одной *операцией* будем понимать одно «съедание» по одинаковому числу литров из двух банок, при этом в разных операциях общее число литров варенья, естественно, может быть различным).

II. Попробуйте рассмотреть следующие обобщения той задачи.

1) У Карлсона есть $n = m+1$ банок с вареньем. В банках находится s, $s+1$, $s+2$, …, $s+m$ литров варенья соответственно. Операция та же, что и в части **I** задачи. Рассмотрите и попробуйте решить пункты, аналогичные пунктам **I.б)** и **I.в).** Рекомендуем начать решение с некоторых небольших значений m.

2) Пусть теперь у Карлсона n банок, в которых находится $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$ литров варенья (все значения – натуральные числа). Попробуйте решить пункты, аналогичные пунктам **I.б)** и **I.в).** Рекомендуем начать решение с небольших значений n.

III. Для обобщения предыдущих пунктов рассмотрите следующие направления:

1) Карлсон может съесть одинаковое целое количество литров из любых трех банок.

2) Карлсон необязательно съедает все варенье, т.е. он может оставить некоторое минимальное количество «несъеденного» варенья (в частях **I** и **II**, конечно, это не более одного литра).

IV. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 2. Квазишахматные игры

Говоря ниже о шахматной доске $M \times N$, мы всегда будем предполагать, что на доске введена прямоугольная система координат, то есть каждой клетке доски естественным образом сопоставлена пара чисел (m, n), причем $1 \le m \le M$, $1 \le n \le N$.

Пусть K – произвольное множество упорядоченных пар целых чисел, то есть $K \subseteq Z^2$. Под квазишахматной фигурой, соответствующей множеству $K \subseteq Z^2$, будем называть такую фигуру, которая, стоя на клетке (m, n) шахматной доски размером $M \times N$, бьет те и только те клетки этой доски, координаты (x, y) которых обладают свойством: $(x-m, y-n) \in K$. Так, например,

- для обычного шахматного слона соответствующим является множество

$$K_c = \{(x, y) \in Z^2 : |x| = |y|\},$$

- для обычной шахматной ладьи – множество $K_л = \{(x, y) \in Z^2 : xy = 0\}$,

- для обычного шахматного короля – множество $K_к = \{(x, y) \in Z^2 : \max\{|x|, |y|\} \le 1\}$.

Будем называть *радиусом действия* квазишахматной фигуры, соответствующей множеству K, натуральное число $R = \max(|x|, |y|)$, если $(x, y) \in K$, при условии, что указанный максимум существует; в противном случае будем говорить, что квазишахматная фигура обладает бесконечным радиусом действия и писать $R = \infty$. Так, радиус действия шахматного короля равен 1, шахматного коня – 2, шахматной ладьи – ∞.

Назовем квазишахматную фигуру, соответствующую множеству K, *центрально симметричной*, если $(x, y) \in K$ в том и только том случае, когда $(-x, -y) \in K$.

Назовем квазишахматную фигуру, соответствующую множеству K, осе*симметричной*, если множество K обладает одним из двух следующих свойств:

а) $(x, y) \in K$ в том и только том случае, когда $(x, -y) \in K$;

б) $(x, y) \in K$ в том и только том случае, когда $(-x, y) \in K$.

При решении следующих задач можно рассматривать сначала обычные шахматные фигуры (ладьи, королей, слонов, коней и так далее), затем – фигуры определенного класса (симметричные, либо фигуры некоего ограниченного радиуса действия). Кроме того, представляет интерес рассмотрение таких фигур:

Гиперкороль. На каждом ходу может сделать S шагов обычного шахматного короля, где S – некоторое натуральное число. Множество K, соответствующее гиперкоролю, содержит все пары целых чисел (x, y)таких, что $\max(|x|,|y|) \le S$.

Императрица. Объединяет ходы ладьи и коня.

Магараджа. Объединяет ходы ферзя и коня.

Гиперладья. Объединяет ходы обычной ладьи и гиперкороля.

Игра 1. Двое ставят фигуры одного цвета так, чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Игра 2. Двое ставят фигуры каждый своего цвета. После первого хода разрешается ставить фигуры только под бой фигур своего цвета, но не под бой противоположного. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Игра 3. Двое ставят фигуры каждый своего цвета. После первого хода разрешается ставить фигуры только под бой фигур противника, но не под бой своих. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Исследуйте следующие задания для игр 1-3. Во всех пунктах под словом «опишите» понимается представление победной стратегии для каждой конкретной фигуры и ее обоснование (или для некоторой совокупности фигур, если эти стратегии в каком-то смысле эквивалентны – покажите в каком).

0) Для доски 9×9 опишите все шахматные фигуры (кроме пешек), при которых выигрывает 1-й игрок. Для доски 8×8 опишите все шахматные фигуры (кроме пешек), при которых выигрывает 2-й игрок.

1) Опишите как можно больший класс квазишахматных фигур, для которых существуют такие m_0 и n_0, что для любых $m > m_0$ и $n > n_0$ на досках $(2m + 1)\times(2n + 1)$ всегда побеждает первый игрок.

2) Опишите как можно больший класс квазишахматных фигур, для которых существуют такие m_0 и n_0, что для любых $m > m_0$ и $n > n_0$ на досках $2m\times n$ всегда побеждает второй игрок.

3) Опишите как можно больший класс квазишахматных фигур, для которых существуют такие m_0 и n_0, что для любых $m > m_0$ и $n > n_0$ на досках $2m \times n$ всегда побеждает второй игрок, а на досках $(2m + 1) \times (2n + 1)$ всегда побеждает первый игрок.

4) Опишите как можно больший класс квазишахматных фигур, для которых существуют такие m_0 и n_0, что для любых $m > m_0$ и $n > n_0$ на досках $m \times n$ всегда побеждает второй (первый) игрок.

5) Предложите свои направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 3. Странные участники турниров

Назовем *p-турниром* такой круговой турнир, в котором в каждом матче разыгрывалось ровно p очков, $p \in \boldsymbol{N}$, причем возможно $(p+1)$ исходов матча (один соперник получает a очков, второй – $(p\text{-}a)$ очков, $0 \le a \le p$, $a \in \boldsymbol{Z}$). Так, например, 1-урниром является баскетбольный турнир, 2-турниром – шахматный, 3-турниром – хоккейный и т.д.

Назовем k-странным участником p-турнира ($k \le p < 2k$, $k \in \boldsymbol{Z}$) такого участника, который набрал k очков в играх с теми, кто в итоге набрал больше очков, чем он, и $(p\text{-}k)$ очков в играх с теми, кто в итоге набрал меньше очков, чем он. С теми, кто выступил с ним наравне, k-странный мог сыграть как угодно.

0. Примеры турниров

а) Приведите пример 1-турнира без странных участников. Другими словами, необходимо определить количество участников такого турнира, для каждой пары участников задать, как они сыграли между собой (это удобно делать с помощью графов или таблиц), определить, сколько баллов набрал каждый из участников, после чего показать, что ни один из участников не является странным.

б) Приведите пример 1-турнира, в котором ровно один участник является 1-странным.

в) Приведите пример 1-турнира, в котором ровно m участников 1-странные ($m \ge 2$).

г) Приведите пример p-турнира, в котором ровно m участников k-странные ($p \ge 2$, $m \ge 0$).

1. 1-турниры:

а) Докажите, что в 1-турнире все 1-странные участники набрали равное число очков.

б) Найдите максимальное и минимальное возможное число 1-странных участников в 1-турнире, где n – общее число участников.

в) Верно ли, что в 1-турнире может быть любое число 1-странных участников от 1 до максимального, найденного в пункте б), при $n > 3$?

г) На 1-турнире был только один 1-странный игрок, наравне с которым не набрал очков никто. Какое место мог занять этот странный? Найдите наилучшее и наихудшее место, которое мог занять этот 1-странный участник в зависимости от числа участников n, и постройте соответствующие примеры.

2. **р-турниры (хотя бы для некоторых значений р):**

а) При каких p и k все k-странные участники набрали равное число очков на p-турнире? Какая наибольшая разница может быть между двумя k-странными игроками?

б) Исследуйте вопросы, аналогичные пунктам б) и в) для 1-турниров для других значений p и k.

в) На p-турнире был только один k-странный игрок, наравне с которым не набрал очков никто. Какое место мог занять этот k-странный? Найдите наилучшее и наихудшее место, которое мог занять этот k-странный участник в зависимости от числа участников n, и постройте соответствующие примеры.

г) Предложить свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 4. Взвешивания – 3

Исходная задача: А. Имеется кусок металла весом 13 килограмм. Необходимо разделить его на 3 гири с целыми весами так, чтобы с помощью них и чашечных весов можно было взвесить любой целочисленный груз от 1 кг до 13 кг. (Гири можно класть как на одну чашу весов, так и на обе одновременно).

В. Имеется кусок металла весом 40 килограмм. Аналогично пункту **А** необходимо разделить его на 4 гири так, чтобы с помощью них и чашечных весов можно было взвесить любой груз от 1 кг до 40 кг. (Гири можно класть как на одну чашу весов, так и на обе одновременно).

I. Пусть имеется кусок металла весом m килограмм. Через $M(m_1, \ldots, m_r)$ обозначим множество различных целых весов, которые можно взвесить на чашечных весах, используя набор гирь, массы которых равны $m_1,\ldots,m_r \in \mathrm{N}$, $m = m_1 + \ldots + m_r$, при условии, что гири можно класть только на одну чашу весов одновременно. *Мощностью* множества $M(m_1, \ldots, m_r)$ будем называть количество его элементов и обозначать, как $|M(m_1, \ldots, m_r)|$.

Например: $M(1, 1) = \{1, 2\}$, $|M(1, 1)| = 2$; $M(4, 1) = \{1, 4, 5\}$, $|M(4, 1)| = 3$.

1. Укажите, при каких значениях $m_1, \ldots, m_r$ выполняется соотношение $|M(m_1, \ldots, m_r)| = m$.

2. Оцените величину $|M(m_1, \ldots, m_r)|$ сверху и снизу при фиксированном r и укажите, при каких значениях $m_1, \ldots, m_r$ данные оценки достигаются.

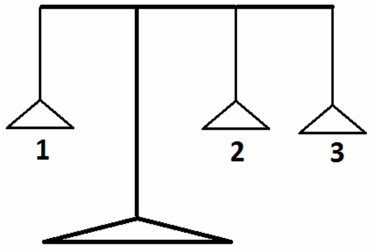
3. При фиксированном m оцените величину $|M(m_1, \ldots, m_r)|$ сверху. Укажите минимальное значение r, при котором данная оценка достигается. Укажите все значения r, при которых данная оценка достигается.

4. Оцените величину $|M(m_1, \ldots, m_r)|$ сверху и снизу при фиксированных m и r и укажите, при каких значениях $m_1, \ldots, m_r$ данные оценки достигаются.

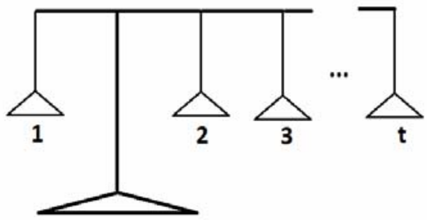
5. Укажите все возможные значения $|M(m_1, \ldots, m_r)|$ при фиксированных m и r.

II. Рассмотрите вопросы пункта **I** в случае, если гири можно класть на обе чаши весов одновременно.

III. Пусть имеется кусок металла весом m килограмм и трёхчашечные весы специального вида (см. первый рисунок). Взвешиваемый груз помещается на чашу с номером 1. Если весы находятся в равновесии, то суммарный вес, помещенный на чаши 2 и 3, равен весу, помещенному на чашу с номером 1. При этом любой вес, помещенный на чашу с номером 1 или 2, умножается на 1, а любой вес, помещенный на чашу с номером 3, умножается на 2. Исследуйте вопросы, аналогичные вопросам пункта **I,** если гири можно класть на любую из трех чаш, и в случае, если гири можно класть только на чаши с номерами 2 и 3.



IV. Пусть имеется кусок металла весом m килограмм и t-чашечные весы специального вида (см. второй рисунок). Взвешиваемый груз помещается на чашу с номером 1. Если весы находятся в равновесии, то суммарный вес, помещенный на чаши с номерами 2, ..., t, равен весу, помещенному на чашу с номером 1. При этом любой вес, помещенный на чашу с номером 1 или 2 умножается на 1, любой вес, помещенный на чашу с номером 3, умножается на 2, любой вес, помещенный на чашу с номером 4, умножается на 3 и т.д. Исследуйте вопросы, аналогичные вопросам пункта **I**, если гири можно класть на любую из t чаш, и в случае, если гири можно класть только на чаши с номерами 2, ..., t.



V. Предложите свои обобщения и направления исследования этой задачи и изучите их.

Задача 5. Периодические функции

Напомним, что функция $y = f(x)$ с областью определения D называется периодической, если существует такое действительное число $T > 0$, называемое периодом, что для любого $x \in D$ выполняется: 1) $(x \pm T) \in D$ и 2) $f(x + T) = f(x)$. Если функция имеет наименьший положительный период, то он называется *основным периодом*. Во всех пунктах задачи функции определены на множестве всех действительных чисел, т.е. $D = \boldsymbol{R}$, и принимают действительные значения.

0.1. Существуют ли такие периодические функции, имеющие основные периоды T_1 и T_2, что их сумма — периодическая функция с основным периодом T_3 (отличным от T_1 и T_2)?

0.2. Существуют ли такие периодические функции, имеющие основные периоды T_1 и T_2, что их сумма — периодическая функция, не имеющая основного периода?

0.3. Существуют ли такие периодические функции, имеющие основные периоды T_1 и T_2, что их сумма — непериодическая функция?

0.4. Существуют ли такие периодические функции, не имеющие основного периода, что их сумма — а) непериодическая функция, б) периодическая функция, имеющая основной период?

0.5. Постройте отличную от константы функцию, периодами которой являются три каких-нибудь наперед заданных числа.

Через f^n будем обозначать функцию $y = f(f(\ldots f(x)\ldots))$ (в записи функция f встречается n раз).

1.1. Постройте пример непериодической функции f такой, что f^n является периодической, а для любого $1 \le k < n$ функция f^k — не периодическая.

1.2. Ответьте на вопрос пункта 1.1, если функция f должна быть непрерывной. Для любого ли n это можно сделать?

1.3. Постройте пример периодической функции f с основным периодом T такую, что f^2 будет периодической функцией с основным периодом T_1 и $T_1 < T$.

Во всех приведенных ниже пунктах функции должны быть непрерывны.

2.1. Докажите, что если функция f периодическая, непрерывная и отличная от константы, то у нее есть основной период.

2.2. Рассмотрим функции f и g с основными периодами T_1 и T_2 соответственно. Что можно сказать о наименьшем периоде функции $f + g$, если а) T_1 и T_2 — целые числа; б) T_1 и T_2 — рациональные числа; в) T_1 и T_2 — вещественные числа?

Предложите свои обобщения. Например, вместо суммы функций рассмотрите их произведение, а вместо функций из $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{R}$ – функции, заданные на некотором подмножестве множества $\boldsymbol{R}$, или комплекснозначные функции и функции комплексной переменной.

Задача 6. Ограничение функций

0) Найдите все действительные числа a, для которых справедливо утверждение: если x – произвольное действительное число, то, по крайней мере, одно из чисел x или $f(x)$ не превосходят числа a. Здесь рассмотрите: а) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, при условии, что $x \ne 0$; б) $f(x) = kx + b$, где k и b – произвольные действительные параметры, а $x \in \boldsymbol{R}$; в) $f(x) = \dfrac{1}{x-k} + b$, где k и b – произвольные действительные параметры и $x \ne k$; г) $f(x)$ – произвольная непрерывная функция и необходимо выяснить, при каких условиях такое a найдется, а при каких его не существует.

1) Найдите все действительные числа a, для которых справедливо утверждение: если x и y – произвольные ненулевые действительные числа, то, по крайней мере, одно из чисел x, y или $f(x, y)$ не превосходят числа a. Здесь $f(x,y) = \dfrac{m}{x} + \dfrac{n}{y}$, а m и n – произвольные действительные параметры. Рассмотрите сначала функции $f(x,y) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, $f(x,y) = \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{y}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $f(x,y) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{y}$, а затем исследуйте задачу в общем случае и найдите значения a в зависимости от m и n.

2) Ответьте на вопрос пункта 1), если $f(x, y) = \frac{m}{xy}$, где m – произвольное действительное число. Решите сначала задачу для $m = 1$, $m = 2$, $m = 64$, $m = -1$, а затем найдите значения a в зависимости от m.

3) Ответьте на вопрос пункта 1), если $f(x, y) = \frac{m}{x-k} + \frac{n}{y-s}$, где m, n, k и s – произвольные действительные числа, которые выступают в роли параметров. При этом x и y – произвольные действительные числа такие, что $x \neq k$ и $y \neq s$.

4) Решить задачу для других функций $f(x, y)$. Например, $f(x, y) = \frac{5}{x^2} + \frac{6}{y^3}$ или $f(x, y) = \frac{7-y}{y} + \frac{9(2-x)}{x^3}$.

5) Исследуйте в общем случае: при каких условиях на функцию $f(x, y)$, задача разрешима.

6) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 7. Преобразования многочленов

Везде в этой задаче рассматриваются многочлены с действительными коэффициентами, причем старший коэффициент многочлена степени n считается не равным нулю.

1) Пусть даны некоторые многочлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n+1}(x)$, различных степеней (от 0 до n). Показать, что, используя операции суммы (разности) многочленов $f(x) \pm g(x)$ и умножения многочлена на число $c \cdot f(x)$, где c – произвольная действительная постоянная, из совокупности многочленов $f_i(x)$ можно получить произвольный многочлен степени не выше n. (Здесь и далее под многочленами $f(x)$ и $g(x)$ может пониматься как любой из первоначально заданных многочленов, так и произвольная уже полученная их комбинация)

2) Пусть даны некоторые многочлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_k(x)$, где $k \leq n$, не обязательно различных степеней (от 0 до n). Установите, какое множество многочленов, можно получить из такой совокупности многочленов $f_i(x)$, используя операции пункта 1). Можно ли получить из указанной совокупности произвольный многочлен степени не выше n?

Исследование этого пункта можно начать с частных вариантов, например:

Пусть изначально заданы многочлены $f_1(x) = x^2 - 1$ и $f_2(x) = x - 1$. Опишите множество многочленов, которые можно из них получить, используя указанные операции.

Тот же вопрос для многочленов $f_1(x) = x^2 + 2x + 1$ и $f_2(x) = x - 1$.

Тот же вопрос для многочленов $f_1(x) = x^2 + 2x + 1$ и $f_2(x) = x^2 - x$.

Под «описанием» множества многочленов можно понимать различные общие свойства этого множества, выполнение которых будет являться необходимым и достаточным условием принадлежности конкретного многочлена рассматриваемому множеству. Исследуйте с этой точки зрения такие свойства или их совокупности:

описание совокупности корней, которыми могут обладать многочлены, принадлежащие этому множеству, описание подмножеств многочленов фиксированной степени из этого множества (например, линейных многочленов в пунктах 1.1-1.3), вид линейной части многочленов (например, линейной части приведенных квадратных многочленов в пунктах 1.1-1.3, где под линейной частью многочлена понимаются слагаемые, содержащие переменную только в первой и нулевой степени), либо какие-то другие свойства или способы описания – придумайте и изучите их сами.

3) Исследуйте вопросы пунктов 1) и 2) в случае, если кроме указанных в них операций можно использовать операции умножения многочленов $f(x)\cdot g(x)$ и(или) композиции многочленов в любой последовательности $f(g(x))$ и $g(f(x))$.

Кроме указанных частных случаев в пунктах 1.1-1.3 попробуйте рассмотреть многочлены более высоких степеней, например,

3.1. $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ и $f_2(x) = x^2 - 4$. Можно ли в этих случаях после нескольких операций получить многочлен вида $x^n - 1$?

3.2. Та же задача для других многочленов степеней 3 и 1 или 3 и 2. Привести примеры, когда ответ на вопрос пункта 3.1 положительный, и когда – нет.

4) Решить аналогичные задачи для многочленов произвольных степеней.

5) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 8. Число точек на алгебраических кривых

Для натурального числа $n \geq 2$ через $\boldsymbol{Z_n}$ обозначим множество всех остатков при делении на n, на этом множестве стандартным образом задаются операции сложения и умножения остатков. Мы будем рассматривать алгебраические кривые над $\boldsymbol{Z_n}$, т.е. множества упорядоченных пар остатков $(x, y) \in \boldsymbol{Z_n}^2$, удовлетворяющих уравнению $g(y) = f(x)$, где $f(x)$ и $g(y)$ – многочлены с целыми коэффициентами. Количество всех различных пар остатков (x, y), удовлетворяющих уравнению $g(y) = f(x)$ будем называть числом точек алгебраической кривой по модулю n и будем обозначать $N(f, g, n)$.

1. Вычислите $N(f, g, n)$, если:
   1.1. $f(x)$ и $g(y)$ – линейные многочлены;
   1.2. один из многочленов $f(x)$ или $g(y)$ линейный, а другой – квадратичный;
   1.3. $f(x)$ и $g(y)$ – произвольные одночлены;
   1.4. $f(x) = x^3 - x$, $g(y) = y^2$, n – простое число вида $4k + 3$;
   1.5. $f(x) = x^3 - 1$, $g(y) = y^2$, n – простое число вида $3k + 2$;.
2. Пусть n – нечетное простое число, $f(x) = x^3 + ax + b$, $g(y) = y^2$, где $4a^3 + 27b^2$ не делится на n.
   2.1. Докажите, что $N(f, g, n) \leq 3n$.
   2.2. Докажите, что существуют положительные постоянные β, γ и натуральное число n_0, такие, что для всех простых $n \geq n_0$ и всех целых a, b таких, что $4a^3 + 27b^2$ не делится на n, выполняется неравенство $N(f, g, n) \geq \beta n^\gamma$.

3. Пусть $\boldsymbol{F_q}$ – конечное поле, состоящее из q элементов. Оцените сверху и снизу число точек $(x, y) \in F_q^2$ алгебраической кривой $y^2 = x^3 + ax + b$, где a, b – фиксированные элементы поля $\boldsymbol{F_q}$.
4. Исследуйте пп. 2, 3 для алгебраических кривых вида $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ или предложите и рассмотрите Ваши собственные направления этой задачи.

Задача 9. Геометрические миниатюры

Зафиксируем на плоскости треугольник ABC.

1. Обозначим через S_L, S_M, S_K площади треугольников, вершинами которых являются, соответственно, основания биссектрис, медиан и точки касания вписанной окружности данного треугольника ABC. Доказать, что $S_K \le S_L \le S_M$.

2. Для точки X, находящейся внутри треугольника ABC, рассмотрим треугольник T_X, вершинами которого являются точки пересечения прямых AX, BX, CX с прямыми BC, AC, AB соответственно.

2.1. Найдите положение точки X, для которого площадь треугольника T_X будет наибольшей.

2.2. Предложите эффективный критерий сравнения между собой площадей треугольников T_X для разных положений точки X.

2.3. Найдите положения точки X, для которых периметр треугольника T_X является наименьшим и набольшим.

2.4. Предложите эффективный критерий сравнения между собой периметров треугольников T_X для различных положений точки X.

2.5. Предложите и решите аналогичные задачи для экстремальных значений других параметров (например, радиуса вписанной окружности, длины наибольшей высоты) треугольников T_X.

3. Для точки Y, находящейся внутри окружности ω, описанной около треугольника ABC, рассмотрим треугольник Δ_Y, вершинами которого являются точки пересечения прямых AY, BY, CY с окружностью ω. Предложите и решите аналогичные задачи для треугольников Δ_Y для различных положений точки Y.

4. Предложите и решите аналогичные задачи для выпуклых многоугольников.

5. Для точки Z, находящейся внутри окружности ω, описанной около треугольника ABC, рассмотрим треугольник F_Z, вершинами которого являются ортогональные проекции точки Z на прямые BC, AC, AB. Предложите и решите аналогичные задачи для треугольников F_Z для различных положений точки Z.

6. Предложите свои конфигурации в этой задаче и изучите их.

Задача 10. Графы и треугольное свойство

Графом называется пара $G = (V, E)$, где V – некоторое непустое конечное множество, E – множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Элементы множества V называются *вершинами* графа, элементы множества E – его *рёбрами*. Множество вершин графа G будем обозначать через $V(G)$, число вершин (*порядок* графа G) – n, число ребер – m. Говорят, что две вершины u и v графа *смежны*, если множество $\{u, v\}$ является ребром и *не смежны* в противном случае. Если u и v – две различные вершины в графе G, то под (u, v)-цепью понимается любая простая цепь с концами в вершинах u и v. Если в графе G между любыми двумя вершинами u и v имеется (u, v)-цепь, то граф G называется *связным*. *Расстоянием* между вершинами u и v в G называется длина кратчайшей (u, v)-цепи (при этом расстояние полагается равным ∞, если вершины u, v принадлежат различным компонентам связности в G). *Диаметром* графа называется максимум среди всех расстояний между парами вершин в этом графе. Граф диаметра 2 назовём *критическим*, если удаление любого ребра в этом графе приводит к увеличению диаметра. *Обхватом* графа называется длина кратчайшего простого цикла в этом графе (при этом обхват полагается равным ∞, если граф не содержит циклов).

Обозначим через $\delta(G)$ – минимальную степень вершины в графе G. Подмножество $S \subseteq V(G)$ называется *независимым*, если никакие две вершины из S не смежны. *Число независимости* графа – наибольшее число вершин в независимом множестве этого графа. Подмножество $S \subseteq V(G)$ называется *доминирующим*, если каждая вершина из $V(G) \setminus S$ смежна с некоторой вершиной из S. Подмножество вершин графа называется *независимым доминирующим*, если оно является как независимым, так и доминирующим. *Число доминирования* графа – наименьшая мощность доминирующего множества этого графа. Число вершин в наименьшем по мощности независимом доминирующем множестве графа G называется *числом независимого доминирования* этого графа и обозначается через $i(G)$.

Тройка $\{u, v, w\}$ вершин графа называется *треугольником*, если неупорядоченные пары $\{u, v\}$, $\{u, w\}$, $\{v, w\}$ являются ребрами этого графа. Будем говорить, что граф G обладает *треугольным свойством*, если он не содержит треугольников и является максимальным в этом смысле, т. е. добавление ребра между любыми двумя его несмежными вершинами приводит к образованию треугольника.

0) Найдите числа независимости, доминирования и независимого доминирования, а также диаметр и обхват для а) полного графа; б) полного двудольного графа с долями размера m и n; в) цикла на n вершинах.

1) Приведите примеры (желательно бесконечные серии) графов G, обладающих треугольным свойством. Докажите, что графы, обладающие треугольным свойством, связны и при $n \geq 3$ имеют диаметр, равный 2.

2) Докажите, что любой полный двудольный граф обладает треугольным свойством. Верно ли, что любой полный двудольный граф является критическим?

3) Докажите, что каждый граф, удовлетворяющий треугольному свойству, является критическим. Верно ли обратное утверждение?

4) Докажите, что для графа G порядка $n \geq 2$, удовлетворяющего треугольному свойству, имеют место следующие неравенства

$$i(G) \leq \delta(G) \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Под записью $[x]$ здесь и далее понимается целая часть числа x.

5) Опишите все графы G, порядка $n \geq 2$, обладающие треугольным свойством, для которых $i(G) = \left[\frac{n}{2}\right]$.

6) Верно ли, что для каждого графа G, обладающего треугольным свойством, выполнено соотношение $i(G)=\delta(G)$? В случае отрицательного ответа на этот вопрос постарайтесь найти бесконечные серии графов G, обладающих треугольным свойством, для которых $i(G)<\delta(G)$.

7) Докажите, что обхват графа, обладающего треугольным свойством, может принимать только два значения 4 или 5. Существует ли граф G обхвата 5, обладающий треугольным свойством, для которого $i(G)<\delta(G)$? Какие значения может принимать обхват произвольного критического графа?

8) Докажите, что при $n \geq 5$ существует граф порядка n с m рёбрами, обладающий треугольным свойством, тогда и только тогда, когда

$$2n-5 \leq m \leq \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]+1 \text{ или } m=k(n-k),$$

где k – некоторое положительное целое число. Например, отсюда вытекает, что при $n = 15$ возможными значениями для числа m рёбер графа G, могут быть только следующие: 14, 25, 26, …, 49, 50, 54, 56.

9) Существует ли критический граф G, не обладающий треугольным свойством, для которого $i(G)<\delta(G)$? Существуют ли критические графы, не обладающие треугольным свойством, для которых $m>\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]+1$?

10) Приведите свои обобщения треугольного свойства и исследуйте их. Например, можно предложить следующий вариант обобщения. Пусть p – целое число, $p \geq 3$. Будем говорить, что граф G обладает *p-свойством*, если он не содержит полных подграфов порядка p и является максимальным в этом смысле, т. е. добавление ребра между любыми двумя его несмежными вершинами приводит к образованию полного подграфа на p вершинах. В частности, при $p = 3$ получаем треугольное свойство.

Задача 11. Дискретная Вселенная

Задача состоит в исследовании движения материальной точки в дискретном мире, который в двумерном случае можно представить как точки клетчатой бумаги, а время t является целым неотрицательным числом. Состояние точки в любой момент времени t определяется его положением $x(t)$ и скоростью $v(t)$. Движение происходит по закону:

$$x(t+1) = x(t) + v(t),\ v(t+1) = v(t) + a(t),$$

где $a(t)$ является некоторой заданной функцией $F(x(t))$ от текущего положения материальной точки.

1. Исследуйте движение частицы на целочисленной прямой с законом:

$$a = -\operatorname{sgn}(x), \quad \text{где } \operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Найдите общую (аналитическую) формулу движения в зависимости от начального положения в предположении, что начальная скорость: а) равна 0, б) равна произвольному целому числу.

2. Докажите, что движение будет периодическим и найти амплитуду и период колебаний для случаев а) и б).

3. Законом сохранения называется любая функция $P(x, v)$, которая остается постоянной во времени: $P(x(t), v(t)) = P(x(0),v(0))$ для любого $t \in N$. Найдите все законы сохранения для движения, заданного в пункте 1.

4. Рассмотрите вопросы 1-3 в предположении, что движение происходит не по целым точкам, а по точкам с дробной частью 1/2: $x(t) \in \boldsymbol{Z} + 1/2$ (но $v(t) \in \boldsymbol{Z}$). (Что при этом поменяется?)

5. Обобщите пункты 1-4 на двумерный случай, в котором движение происходит по точкам (x, y), где а) $x, y \in \boldsymbol{Z}$, б) $x, y \in \boldsymbol{Z} + 1/2$ по закону:

$$a = (-\operatorname{sgn}(x), -\operatorname{sgn}(y)).$$

Найдите траектории движения, период колебаний, законы сохранения движения.

6. Исследуйте а) одномерную, б) двумерную задачи движения двух материальных точек x_1, x_2 с законом движения: $a_1 = -\operatorname{sgn}(x_1 - x_2)$, $a_2 = -\operatorname{sgn}(x_2 - x_1)$,

7. Рассмотрите более экзотические законы движения. Например, $a = -x(\mathrm{mod}\ 2)$. Предложите свои направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 12. Частицы

На оси Ox находятся несколько частиц. Каждую секунду каждая частица делится на 2 равные части (каждая по массе равна исходной), первая часть располагается на 1 левее соответствующей частицы, а вторая – на 1 правее. Если в одну точку попадают две частицы, то их масса складывается.

I. Допустим, что в начальный момент времени на оси находится только одна частица массы 1 в точке m (здесь и далее все значения точек целые).

1) Найти массу, которая будет находиться в точке k через n секунд (рассмотрите все точки, в которых окажется ненулевая масса).

2) Как изменится ответ, если в точке 0 находится поглощающий экран, т.е. все частицы, попавшие в эту точку, уничтожаются?

3) Как изменится ответ, если в точке 0 находится отражающий экран, т.е. частица, попавшая в 0, на следующем шаге не делится, а попадает в точку 1?

4) Как изменится ответ, если в точке 0 находится полупрозрачная мембрана: частица, попавшая в 0, делится на две в пропорции $p : q$, первая попадает в –1, а вторая в 1?

5) Что происходит, если в точках 0 и d находятся отражающие экраны, или поглощающие экраны, или один поглощающий экран, а другой отражающий?

6) Что происходит, если на каждом шаге частица делится не на равные части, а на части, массы которых слева и справа равны соответственно s и t? Тот же вопрос, если массы частиц изменяются по некоторому рекуррентному закону.

II. а) Предложите и исследуйте аналогичные модели с двумя (или более) исходными частицами, либо двумерные аналоги этих моделей.

б) Предложите свои обобщения и исследуйте их.

Задача 13. Сюрреалистический волк

1. [*Раз, два, три, четыре…*] В одной из вершин куба сидит волк, но охотникам он не виден. N охотников стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые N вершин куба. Если они не попадают в волка, то до следующего залпа волк перебегает в одну из трёх соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в волка за наименьшее количество залпов. Решите задачу для $N = 6, 5, 4, 3, 2$.

2. [*Матерый волк*] Ситуация та же, но волк может перебежать в соседнюю вершину, а может и остаться на месте. а) Покажите как 5 охотников могут гарантированно убить волка. б) Сколько им для этого потребуется залпов? (Интересует наименьшее число залпов.) в) Докажите, что 4 охотника не смогут гарантированно убить волка за конечное число залпов.

3. [*Крыша едет дальше…*] Решите аналогичные задачи для тетраэдра, октаэдра, других многогранников; для четырехмерного куба, пятимерного куба, для полного графа порядка p, полного двудольного графа с долями размера m и n и т.д.

4. Решите пункты 1–3 при условии, что волков 2, 3, 4 (два и более волка не могут находится в одной вершине), а охотникам требуется убить хотя бы одного волка.

5. Предложите свои обобщения и исследуйте их.