

Письменный (нулевой) тур

6 декабря 2017 года

ВНИМАНИЕ:

- 1) **время решения 3 час. = 180 мин.;**
- 2) **исследование по каждой задаче необходимо оформить в отдельной тетради** и подписать название команды, город, фамилию автора(ов);
- 3) **на первом листе** каждой тетради сделайте резюме своего исследования соответствующей задачи – то есть
 - отдельно, четко и лаконично сформулируйте основные результаты вашего исследования этой задачи;
 - оформление самого решения (оформление результатов – доказательств, примеров и других элементов исследования – начинайте **со второго листа тетради**).
- 4) интерес представляет как максимально полное решение авторской постановки, так и ваши собственные идеи, обобщения, направления (утверждения, обоснования, гипотезы; разрешаются импровизации с конкретными результатами);

Задача 1. Высоты, медианы, биссектрисы и т.д.

1. В треугольнике длины двух сторон соответственно равны 1 и 4. Определите, в каких пределах могут изменяться длины
 - а) высоты,
 - б) медианы,
 - в) биссектрисы, проведенных к третьей стороне, а также
 - г) радиусы вписанных и описанных окружностей.
2. Аналогичный вопрос о длинах остальных высот, медиан и биссектрис.
3. Решите пункты 1, 2, если известно, что треугольник остроугольный.
4. Решите предыдущие пункты, при условии, что длины двух сторон треугольника соответственно равны a и b .
5. Если длины двух медиан треугольника равны a и b , то в каких пределах может изменяться третья медиана, если треугольник произвольный. А если треугольник остроугольный.
6. Решите аналогичную задачу для биссектрис и высот треугольника.
7. Предложите свои направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача № 2. Необычные уравнения и операции над числами

Для натурального числа n определим функции $f(n) = n + P(n)$, $g(n) = n \times S(n)$, где $P(n)$ – произведение, а $S(n)$ – сумма цифр числа n .

1. Решите уравнение $f(n) = g(n)$.
2. Докажите, что операцией $g(n)$ возможно получить не более половины пятизначных чисел.
3. Докажите, что существует бесконечно много таких троек чисел (a, b, c) , что $g(a) = g(b) = g(c)$, причем $g(a)$ не кратно 5.
4. Верно ли, что существуют натуральные числа, которые нельзя получить из меньших чисел операциями $f(n)$ и $g(n)$.
5. Верно ли, что существует 100 подряд идущих чисел, которые нельзя получить из меньших чисел операциями $f(n)$ и $g(n)$.
6. Предложите свои направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача № 3. Разбиения и пересечения

1. а) Равносторонний треугольник со стороной 20 разбит тремя семействами параллельных прямых на 400 равносторонних треугольников со стороной 1. Какое наибольшее количество этих треугольников можно пересечь (во внутренних точках) одной прямой?
б) А если сторона исходного треугольника равна n , а треугольник разбит параллельными прямыми на n^2 равносторонних треугольников?
- II а) А если вместо треугольника взят правильный тетраэдр, а вместо прямых семейства параллельных плоскостей, тогда какое количество наибольшее число маленьких тетраэдров может пересечь прямая?
б) А плоскость?
в) Решите эту задачу в общем случае, или хотя бы для некоторых значений длин ребер тетраэдра.
- III. Та же задача, но вместо треугольника или тетраэдра взят квадрат или куб.
- IV. Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.