

Письменный (нулевой) тур

2 декабря 2019 года

ВНИМАНИЕ:

- 1) время решения 3 час. = 180 мин.;
- 2) исследование по каждой задаче необходимо оформить в отдельной тетради и подписать название команды, город, фамилию автора(ов);
- 3) на первом листе каждой тетради сделайте резюме своего исследования соответствующей задачи – то есть
 - отдельно, четко и лаконично сформулируйте основные результаты вашего исследования этой задачи;
 - оформление самого решения (оформление результатов – доказательств, примеров и других элементов исследования – начинайте **со второго листа тетради**).
- 4) интерес представляет как максимально полное решение авторской постановки, так и ваши собственные идеи, обобщения, направления (утверждения, обоснования, гипотезы; разрешаются импровизации с конкретными результатами)

Задача 1. Замкнутые ломаные – 2

Далее в задаче под ломаной общего положения будем понимать замкнутую ломаную на плоскости, никакие три звена которой не пересекаются в одной точке, никакие два звена не лежат на одной прямой и число звеньев не менее трёх.

- 1.1. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь 7-звенная ломаная общего положения?
- 1.2. Покажите, что существует 6-звенная ломаная общего положения, которая имеет ровно 7 точек самопересечения. Может ли она иметь более 7 точек самопересечения?
- 1.3. Постройте 8-звенную ломаную общего положения, которая имеет не менее 16 точек самопересечения. Покажите, что она не может иметь более 18 точек самопересечения.
- 1.4. Найдите максимальное возможное количество точек самопересечения n -звенной ломаной общего положения, где n – нечётное число.
- 1.5. Покажите, что для максимального числа $f(n)$ самопересечений n -звенной ломаной общего положения, где n – чётное, выполнено неравенство

$$f(n) \leq \frac{n(n-7/2)}{2}.$$

- 2.1. Найдите наибольшее количество точек самопересечения 14-звенной ломаной общего положения, проведённой по линиям клетчатой бумаги.
- 2.2. Найдите наибольшее количество точек самопересечения $(4k+2)$ -звенной ломаной, где $k \in \mathbb{N}$, общего положения, проведённой по линиям клетчатой бумаги.
3. Предложите свои вопросы или обобщения в этой задаче и изучите их.

Задание 2. Задача про окружности и сферы

:

Часть I. Три окружности B_1, B_2, B_3 одного радиуса r с центрами в точках O_1, O_2, O_3 попарно касаются друг друга. Окружность B_4 с центром в точке O_4 касается всех трех указанных окружностей.

a) Укажите возможные значения радиусов R окружности B_4 в зависимости от типов касания (внутренние или внешние);

- Решите эту же задачу для случая, когда радиусы окружностей разные.

- Предложите свои направления исследования в этом пункте и решите их.

b) Рассмотрим далее две окружности B_1 и B_2 , не обязательно касающиеся друг друга, одного радиуса r с центрами в точках O_1, O_2 . Окружность B_3 с центром в точке O_3 внешним образом касается обеих сфер и прямой проходящей через центры первых двух окружностей. Найдите множество возможных значений радиуса третьей окружности. При каких значениях радиуса третьей окружности она будет касаться прямой, проходящей через центры O_1, O_2 ?

c) Пусть четвертая окружность B_4 радиуса R касается трех окружностей из пункта b). Найдите соотношение между радиусами окружностей B_3 и B_4 .

d) Решите пункты b) и c) в случае произвольных радиусов окружностей B_1 и B_2 .

e) Предложите свои направления исследования в этом пункте и решите их.

Часть II. Три сферы S_1, S_2, S_3 одного радиуса r с центрами в точках O_1, O_2, O_3 попарно касаются друг друга. Сфера S_4 с центром в точке O_4 касается всех трех указанных сфер. Все касания - внешние.

a) Укажите границы промежутка возможных значений радиуса R сферы S_4 ;

b) Сфера S_5 с центром в точке O_5 внешним образом касается всех четырех указанных сфер. При каких значениях радиуса R сферы S_4 сфера S_5 касается плоскости π , проходящей через центры O_1, O_2, O_3 ?

c) При каких значениях радиуса R сферы S_4 центры O_4 и O_5 сфер S_4 и S_5 лежат по разные стороны от плоскости π ?

Предложите свои направления исследования в этой части и исследуйте их.

3. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача № 3. Функциональные уравнения – 2

1. Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие на естественной области определения следующему уравнению $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1$.
2. Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие на естественной области определения следующему уравнению $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$.
3. Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие на естественной области определения следующему уравнению $xf(x) + \frac{1}{1-x}f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$.
4. Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие на естественной области определения следующему уравнению $\frac{1}{1-x}f(x) + xf\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$.
5. Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие на естественной области определения следующему уравнению $f(x) + xf\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x, a \neq 0$.
6. Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие на естественной области определения следующему уравнению $bf(x) + cf\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = d, a \neq 0$.
7. Предложите свои обобщения или направления в исследовании подобных уравнений и изучите их.