ПРОГРАММА

XXV Республиканского турнира юных математиков

Все основные мероприятия турнира в период 4-9 декабря проходят на базе ГУО «Минский областной институт развития образования», г.Минск, ул. Глебки, 88 (МОИРО).

3 декабря (воскресенье) – предварительные мероприятия турнира

до 11.00	Представление командам в жюри окончательных материалов по решению заданий турнира	Онлайн, Zoom
12.00 – 13.00	Жеребьевка отборочных боев первого тура	Онлайн, Zoom

4 декабря (понедельник)

до 17.00	Заезд команд, размещение	Вестибюль МОИРО
17.00 – 20.00	Регистрация команд, представление окончательных материалов исследований в жюри (в печатном виде)	Комната жюри (конференц-зал МОИРО)
17.00 – 18.00	Ужин (для иногородних)	Столовая МОИРО
до 22.00	Представление командами письменных отзывов в жюри по материалам отборочных боев первого тура	Комната жюри (конференц-зал МОИРО), + по эл. почте

5 декабря (вторник)

08.30 – 09.30	Завтрак (для иногородних)	Столовая МОИРО
10.45 – 11.00	Собрание оргкомитета, жюри, руководителей и участников команд	Актовый зал МОИРО
11.00 – 12.00	Открытие турнира	Актовый зал МОИРО
12.00 – 12.30	Инструктаж по правилам безопасного поведения участников турнира	Актовый зал МОИРО
12.30 – 13.00	Обед (все участники)	Столовая МОИРО
13.00 – 17.00	Отборочные бои первого тура	201, 202, 204
17.00 – 18.00	Заседание жюри: подведение итогов боев первого тура и утверждение составов жюри для отборочных боев второго тура	Комната жюри (конференц-зал МОИРО)
17.00 – 17.30	Ужин (все участники)	Столовая МОИРО
18.00 – 18.30	Подведение итогов боев первого тура жеребьевка отборочных боев второго тура	Актовый зал МОИРО
после 18.30	Подготовка команд к отборочным боям второго тура	По списку аудиторий

6 декабря (среда)

08.30 – 09.00	Завтрак (для иногородних)	Столовая МОИРО
09.30 – 10.00	Сбор участников турнира, распределение по аудиториям	Актовый зал МОИРО
10.00 – 13.30	Выполнение командами заданий письменного тура	По списку аудиторий МОИРО
13.30 – 14.00	Обед (все участники)	Столовая МОИРО
14.00 – 17.00	Подготовка команд к отборочным боям второго тура	По списку аудиторий
16.00	Научно-методический семинар для учителей математики и руководителей команд: «Исследовательская деятельность учащихся – общие подходы и особенности в ее проведении и в подготовке учащихся: от олимпиад к научно-исследовательским работам и прикладным проектам»	Гл. корпус БГУ, пр.Независи-мости, 4, ауд. 513 (ведущий Б.В.Задворный, *с онлайн подключением*)
17.00 – 18.00	Ужин (все участники)	Столовая МОИРО
после 18.00	Разбор заданий письменного тура, Подготовка команд к отборочным боям второго тура	По списку аудиторий
19.00	Заседание жюри: подведение итогов письменного тура	Комната жюри (конференц-зал МОИРО)
после 19.00	Подготовка команд к отборочным боям второго тура	По списку аудиторий
до 22.00	Представление командами письменных отзывов в жюри по материалам отборочных боев второго тура	Комната жюри (конференц-зал МОИРО), + по эл. почте

7 декабря (четверг)

08.30 – 09.30	Завтрак (для иногородних)	Столовая МОИРО
10.00 – 14.30	Отборочные бои второго тура	201, 202, 204
13.00 – 14.00	Обед (все участники)	Столовая МОИРО
16.00 – 17.00	Подведение итогов боев второго тура, жеребьевка финальных боев	Актовый зал МОИРО
17.00	Заседание жюри: утверждение составов жюри для оценивания финальных боев	Комната жюри (конференц-зал МОИРО)
17.00 – 18.00	Ужин (все участники)	Столовая МОИРО
после 18.00	Подготовка команд к финальным боям	По списку аудиторий

8 декабря (пятница)

08.30 – 09.30	Завтрак (для иногородних)	Столовая МОИРО
09.30 – 15.30	Подготовка команд к финальным боям	По списку аудиторий
13.00 – 14.00	Обед (все участники)	Столовая МОИРО
15.30 – 17.00	Мастер-класс для учащихся и руководителей: - решения (исследования) избранных заданий турнира юных математиков с точки зрения авторов; - деятельность исследовательского характера учащихся и ее специфика в разрезе заданий, порядка и правил проведения турниров юных математиков – от региональных до международных	Актовый зал или какая-то аудитория (*с подключением онлайн*)
17.00 – 18.00	Ужин (для иногородних)	Столовая МОИРО
после 18.00	Подготовка команд к финальным боям	По списку аудиторий
До 22.00	Представление командами письменных отзывов в жюри по материалам финальных боев	Комната жюри (конференц-зал МОИРО), + по эл. почте

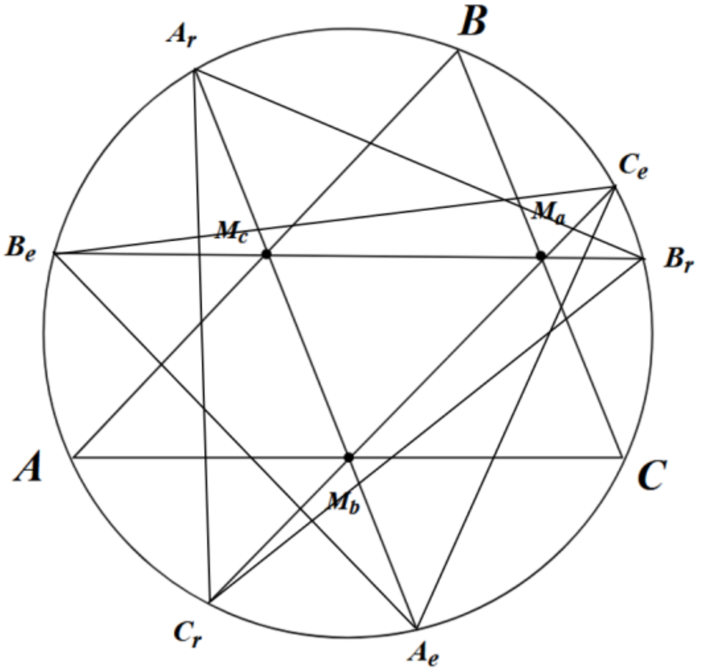
9 декабря (суббота)

08.00 – 09.00	Завтрак (для иногородних)	Столовая МОИРО
09.00 – 13.30	Финальные бои	202, 204
13.00 – 14.00	Обед (для иногородних)	Столовая МОИРО
14.00 – 14.30	Заседание жюри: утверждение результатов финальных боев; определение победителей турнира	Комната жюри (конференц-зал МОИРО)
15.00 – 16.00	Закрытие турнира и награждение победителей	Актовый зал МОИРО
после 16.00	Отъезд участников	

Исследовательские задания
XXV Республиканского турнира юных математиков

Задача 1. Левые и правые вписанные многоугольники

I. А*) Пусть Ω – описанная окружность треугольника ABC; точки M_a, M_b, M_c – середины сторон BC, CA, AB соответственно; A_e, B_e, C_e – точки пересечения Ω с лучами M_cM_b, M_aM_c, M_bM_a соответственно; A_r, B_r, C_r – точки пересечения Ω с лучами M_bM_c, M_cM_a, M_aM_b соответственно (см. рисунок). Докажите, что среднее арифметическое площадей треугольников $A_eB_eC_e$ и $A_rB_rC_r$, не меньше площади треугольника ABC.



Б*) Площадь левого треугольника не меньше площади ΔABC и площадь правого треугольника не меньше площади ΔABC, а равенство достигается только тогда, когда треугольник ABC равносторонний.

В) Докажите условие А) для вписанного четырехугольника.

Г) Докажите условие Б) для вписанного четырехугольника.

Д) Докажите условие А) для вписанного пятиугольника.

Е) Докажите условие Б) для вписанного пятиугольника.

Ж) Докажите условие А) для вписанного n-угольника.

З) Докажите условие Б) для вписанного n-угольника.

II. Исследуйте вопросы, аналогичные пунктам части **I,** если M_a, M_b, M_c – точки такие, что $AM_c : M_cB = BM_a : M_aC = CM_b : M_bA = 2:1$.

III. Попробуйте исследовать эту задачу при других отношениях отрезков, указанных в части **II.** Предложите свои направления исследования и изучите их.

* *См. «Квант»,* 2023 № 1.

Задача 2. Бруски в коробке

Пусть имеется n брусков и одна коробка, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, при этом i-ый брусок имеет размеры $a_i \times b_i \times c_i$, а коробка – $a \times b \times c$, где $0 < a \leq b \leq c$ и $0 < a_i \leq b_i \leq c_i \leq c$, $a_i \leq a$, $b_i \leq b$, $i = \overline{1,n}$. Кроме того, множество троек (a_i, b_i, c_i), $i = \overline{1,n}$, отсортировано лексикографически по неубыванию, т. е. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, если же $a_i = a_{i+1}$, то $b_i \leq b_{i+1}$, а если $a_i = a_{i+1}$ и $b_i = b_{i+1}$, то $c_i \leq c_{i+1}$, $i = \overline{1,n-1}$. Какое максимальное число брусков k может поместиться в этой коробке, если n – достаточно большое число, то есть $n > k$, и бруски в коробку можно класть только таким образом, чтобы их рёбра были параллельны или перпендикулярны рёбрам этой коробки?

1. Рассмотрите одномерный случай данной задачи, то есть, когда бруски и коробка – это отрезки, длины которых a_i, $i = \overline{1,n}$, и a, соответственно. Для этого

- решите эту задачу, если $a_i = 3$, $i = \overline{1,m}$, $a_i = 4$, $i = \overline{m+1,100}$, и $a = 25$;
- решите эту задачу, если $a_i = const$, $i = \overline{1,n}$;
- постройте алгоритм решения одномерной задачи для произвольных $0 < a_i \leq a$, $i = \overline{1,n}$.

2. Рассмотрите двумерный случай данной задачи, то есть, когда бруски и коробка – это прямоугольники, размеры которых $a_i \times b_i$, $i = \overline{1,n}$, и $a \times b$, соответственно. Для этого решите эту задачу или постройте алгоритм решения, если

- $a_i = 3$, $b_i = 5$, $i = \overline{1,m}$, $a_i = b_i = 4$, $i = \overline{m+1,100}$, и $a = 7, b = 12$, или $a = 16, b = 19$, или $a = 6, b = 15$;
- все прямоугольные бруски – одинаковые квадраты;
- $a_i = const$, $b_i > a$, $i = \overline{1,n}$;
- $b_i > a$, $i = \overline{1,n}$;
- все прямоугольные бруски имеют одинаковые размеры;
- все прямоугольные бруски – квадраты;
- на размеры прямоугольных брусков нет никаких ограничений, отличных от заданных в условии задачи, то есть общий случай.

3. Рассмотрите исходную задачу (трёхмерный случай). Для этого решите эту задачу или постройте алгоритм решения, если

- $a_i = 3$, $b_i = 4$, $c_i = 5$, $i = \overline{1,m}$, $a_i = b_i = c_i = 4$, $i = \overline{m+1,100}$, и $a = 7, b = 9, c = 12$, или $a = 16, b = 19, c = 25$, или $a = 6, b = 8, c = 15$;
- все бруски – одинаковые кубы;
- $a_i = const$, $b_i = const$, $b_i > a$, $c_i > b$, $i = \overline{1,n}$;
- $a_i = const$, $b_i > a$, $c_i > b$, $i = \overline{1,n}$;
- $b_i > a$, $c_i > b$, $i = \overline{1,n}$;
- $a_i = b_i = const$, $i = \overline{1,n}$;

- все бруски имеют одинаковые размеры;
- все бруски – кубы;
- $a_i = b_i,\ i = \overline{1,n}$;
- на размеры брусков нет никаких ограничений, отличных от заданных в условии задачи, то есть общий случай.

4. Попробуйте для каждого предыдущего пункта найти среди всех размещений брусков в коробке, которые удовлетворяют решению задачи, такое размещение, при котором объём (площадь, длина) свободного пространства коробки будет минимальным. В каких случаях это размещение будет иметь минимальный объём (площадь, длина) свободного пространства коробки среди всех возможных размещений брусков в ней?
5. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

Задача 3. Сумма цифр в уравнениях и неравенствах

Обозначим через $S(n)$ сумму цифр натурального числа n.

0. Решите неравенство $S(n) \geq n$.
1. Решите уравнение $(\mathrm{S}(n) - 2)^2 = n$.
2. Решите неравенство $(\mathrm{S}(n) - 2)^2 \geq n$.
3. Решите уравнение $(\mathrm{S}(n) - 3)^3 = n$.
4. Решите неравенство $S^3(n) \geq n$.
5. Решите уравнение $(\mathrm{S}(n) - k)^k = n$. Здесь и далее k – заданное натуральное число.
6. Решите неравенство $(S(n) - p)^k \geq n$, p – заданное целое число.
7. Решите двойное неравенство $S^k(n) \geq n \geq S^{k-1}(x)$.
8. Предложите свои обобщения в этой задаче и изучите их.

Задание 4. Автомобили и стоянки города N

0. В городе N имеется ровно 100 автомобилей, номера которых 001, 002, …, 100 соответственно. Также в этом городе 50 стоянок, которые пронумерованы 00, 01, ..., 49. Автомобиль с номером X может припарковаться на стоянку с номером Y тогда и только тогда, когда из X можно получить Y путем вычеркивания одной цифры. Возникают два вопроса.

А) Все ли автомобили могут припарковаться на стоянки? И если ответ на первый вопрос «да», то, может быть, некоторые стоянки можно снести и возникает второй вопрос.

Б) Какое наименьшее количество стоянок необходимо оставить в городе N, чтобы на них можно было припарковать все машины?

1. Решите пункт 0 в случае, если в городе N имеется ровно 300 автомобилей, номера которых 100, 101, …, 399 соответственно.

2. Решите пункт 0 в случае, если в городе N имеется ровно 1000 автомобилей, номера которых 000, 001, …, 999 соответственно.

3. Решите пункт 1 и 2 в случае, если в городе N имеется 100 стоянок, которые пронумерованы 00, 01, ..., 99.

4. Ответьте на вопросы пункта 0 в случае, если в городе N имеется ровно 10 000 автомобилей, номера которых 0000, 0001, …, 9999, а стоянок 100 и пронумерованы они 00, 01, ..., 99. Автомобиль с номером X может припарковаться на стоянку с номером Y тогда и только тогда, когда из X можно получить Y путем вычеркивания двух (не обязательно стоящих рядом) цифр.

5. А если автомобилей 10^k, где $k > 4$ натуральное число, стоянок 100 и автомобиль с номером X может припарковаться на стоянку с номером Y тогда и только тогда, когда из X можно получить Y путем вычеркивания $k-2$ (не обязательно стоящих рядом) цифр. При этом нумерация автомобилей и стоянок по аналогии с пунктом 4. Какими будут ответы на вопросы А) и Б)?

6. А если автомобилей 10^k и стоянок 10^{k-2}, где $k > 4$ натуральное число, и автомобиль с номером X может припарковаться на стоянку с номером Y тогда и только тогда, когда из X можно получить Y путем вычеркивания двух (не обязательно стоящих рядом) цифр. При этом нумерация автомобилей и стоянок по аналогии с пунктом 4. Какими будут ответы на вопросы А) и Б)?

7. Пусть в городе N имеется ровно $T < 1\,000$ автомобилей, номера которых 000, 001, …, $T-1$, а стоянок $S < 100$ и пронумерованы они 00, 01, ..., $S-1$. Автомобиль с номером X может припарковаться на стоянку с номером Y тогда и только тогда, когда из X можно получить Y путем вычеркивания одной цифры. Какими будут ответы на вопросы А) и Б)?

8. Решите пункт 5 и 6 в случае, если вычеркиваемые цифры обязательно стоят подряд, то есть, между ними нет других цифр.

9. Предложите свои обобщения в этой задаче и изучите их.

Задача 5. Особенные подмножества

Предварительное замечание. Везде в этой задаче рассматриваются неупорядоченные множества и подмножества (т.е. $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 1, 2\}$ – это одно и то же множество). Пустое множество является подмножеством любого множества.

Раздел 1

1. Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ не найдется двух подряд идущих чисел?
2. А если множество в пункте 1 состоит из чисел 1, 2,…, n?

3. Во скольких подмножествах множества {1, 2, 3, …, 10} не найдется трех подряд идущих чисел?
4. А если множество в пункте 3 состоит из чисел 1, 2,…, n?
5. Сможете ли вы решить задачу в общем случае? Во скольких подмножествах множества {1, 2, 3, …, n} не найдется m подряд идущих чисел?

Раздел 2

1. Во скольких подмножествах множества {1, 2, 3, …, 10} не найдется чисел, между которыми разность меньше 3? Решите, аналогичную задачу для множества чисел от 1 до n.
2. Во скольких подмножествах множества {1, 2, 3, …, 10} не найдется чисел, между которыми разность равна 2? Решите, аналогичную задачу для множества чисел от 1 до n.
3. Во скольких подмножествах множества {1, 2, 3, …, 10} не найдется чисел, между которыми разность равна или 2 или 3 или 5? Решите, аналогичную задачу для множества чисел от 1 до n.
4. Попробуйте исследовать данную постановку в общем виде. Есть множество запрещенных разностей $R = \{r_1, r_2,\ldots,r_m\}$. Во скольких подмножествах множества {1, 2, 3, …, n} не найдется чисел, между которыми разность принадлежит множеству запрещенных разностей.

Раздел 3

1. Рассмотрим всевозможные непустые подмножества множества {1, 2, ..., N}, не содержащие подряд идущих чисел. Для каждого подмножества вычислим произведение его элементов. Чему равна сумма квадратов этих произведений?

Раздел 4

1. Пусть множество M состоит из чисел {1, 2, 3, …, 25}. Эти числа расположены в таблице T змейкой:

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25

Числа, которые расположены в соседних по вертикали или горизонтали клетках назовем «близкими». Сколько подмножеств у множества M в которых не найдется двух близких чисел?

2. А если «близкими» числами считать числа в клетках по диагонали. Например, у 12 «близкие» числа это 8, 10, 18 и 20.
3. Попробуйте объединить условия «близости» из пунктов 1 и 2 т.е. у числа 12 будет восемь близких чисел: 8, 9, 10, 11, 13, 18, 19, 20
4. Попробуйте решить аналогичные задачи (п.1-3) если числа в таблице Т расположены по спирали:

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

5. Попробуйте исследовать аналогичные задачи для других множеств из n^2 чисел и квадратных таблиц или из mn чисел и прямоугольных таблиц.

Задача 6. Порядок в перестановках

Пусть σ и τ — две различные перестановки чисел от 1 до n. Перестановки σ и τ будем называть *сравнимыми*, если для любых двух наборов действительных чисел $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ и $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ выполняется либо $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\tau(i)}$, либо $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \ge \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\tau(i)}$. В первом случае будем писать $\sigma \preccurlyeq \tau$, а во втором случае — $\sigma \succcurlyeq \tau$.

Если $\sigma \preccurlyeq \tau$, то будем говорить, что перестановка σ *хуже* перестановки τ, а перестановка τ *лучше* перестановки σ.

Будем говорить, что перестановки σ_1, σ_2, …, σ_k образуют *цепь*, если $\sigma_1 \preccurlyeq \sigma_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \sigma_k$, возможно в другом порядке. Количество перестановок будем называть *длиной цепи*. Если не существует перестановки τ, такой, что перестановки σ_1, σ_2, …, σ_k, τ образуют цепь, то цепь будем называть *не удлиняемой*.

1. Докажите, что для любой перестановки σ отличной от $(1,2,\dots,n)$ и $(n,n-1,\dots,1)$ есть перестановки τ_1 и τ_2 такие, что $\tau_1 \preccurlyeq \sigma \preccurlyeq \tau_2$.

2. Пусть $n=3$. а) Правда ли, что существую несравнимые перестановки, если да, то сколько таких пар? б) Чему равна длина наибольшей цепи? в) Сколько существует не удлиняемых цепей?

3. Пусть $n=4$. Ответьте на те же вопросы, что и в предыдущем пункте.

4. Для перестановок σ и τ предложите способ проверки являются ли они сравнимыми.

5. Для $n \geq 3$ оцените длину наибольшей цепи.

6. Для $n \geq 3$ оцените количество не удлиняемых цепей.

Будем говорить, что двойки перестановок (σ_1, σ_2) *хуже* двойки перестановок (τ_1, τ_2), если для любых наборов $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ и $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$ выполняется $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma_1(i)} c_{\sigma_2(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\tau_1(i)} c_{\tau_2(i)}$.

7. Для $n = 3$ опишите все пары двоек перестановок, в которых одна двойка хуже другой.

8. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

Задача 7. Дни здоровья БГУ

1. Во время спартакиады «Дни здоровья БГУ» среди сотрудников БГУ был организован турнир по волейболу с выбыванием. В турнире принимали участие 8 команд. В первом круге команды случайным образом разбиваются на пары, так что любое разбиение равновероятно, и играется 4 матча. Победители выходят в следующий круг, где с помощью такого же процесса выявляется 2 победителя. В третьем круге определяется чемпион. Известно, что все команды в действительности упорядочены по силе игры, так что x_1 играет лучше всех, x_2 – лучше всех, кроме x_1, и так далее, команда x_8 играет хуже всех. Когда команда x_j играет с командой x_k и i <k, то с вероятностью p побеждает x_j и с вероятностью 1-p побеждает x_k, причем результаты их игры не зависят от исходов других встреч. Будем считать, что для всех j и k имеется одна и та же вероятность p.

   А) С какой вероятностью команда x_1 выиграет турнир?

   Б) С какой вероятностью в третьем круге будут участвовать две лучших команды x_1 и x_2?

   В) С какой вероятностью во втором круге будут участвовать две лучших команды x_1 и x_2?

   Г) С какой вероятностью x_2 выиграет турнир?

2. Во время спартакиады «Дни здоровья БГУ» среди сотрудников БГУ был организован турнир по волейболу с выбыванием. В турнире принимали участие 2^n команд. В первом круге команды случайным образом разбиваются на пары, так что любое разбиение равновероятно, и играется 2^{n-1} матчей. Победители выходят в следующий круг, где с помощью такого же процесса выявляется 2^{n-2} победителя. В *к*-м круге играется 2^{n-k} партия между 2^{n-k+1} до сих пор не выбывших команд. В n-м круге определяется чемпион. Известно, что все команды в действительности упорядочены по силе игры,

так что x_1 играет лучше всех, x_2 – лучше всех, кроме x_1, и так далее, команда x_n играет хуже всех. Когда команда x_j играет с командой x_k и i <k, то с вероятностью p побеждает x_j и с вероятностью 1-p побеждает x_k, причем результаты их игры не зависят от исходов других встреч. Будем считать, что для всех j и k имеется одна и та же вероятность p.

А) С какой вероятностью команда x_1 выиграет турнир?

Б) С какой вероятностью в третьем круге будут участвовать две лучших команды x_1 и x_2?

В) С какой вероятностью в k-м с конца круге будут участвовать 2^k лучших команд?

Г) С какой вероятностью x_2 выиграет турнир?

Д) Обозначим $N(n)$ число существенно различных результатов турнира (два турнира считаются по существу совпадающими, если в них все матчи играются между теми же командами и победители одни и те же). Найдите значение $N(n)$.

Е) Докажите, что если $\frac{1}{2} < p < 1$, то вероятность выигрыша турнира игроком x_j строго больше, чем игроком x_{j+1} при $1 \le j < 2^n$.

Задача 8. Параболы

Пусть на координатной плоскости нам даны точка $F(x_0, y_0)$, которую будем называть *фокусом*, график функции $y = f(x)$, который будем называть *директрисой*, и метрика $\rho(A, B)$ (расстояние между точками A и B).

Параболой будем называть геометрическое место точек равноудалённых от фокуса и директрисы.

В пунктах 1–3 под параболой будем иметь ввиду множество точек (x, y) для которых выполняется равенство $\rho\big((x_0, y_0), (x, y)\big) = \rho\big((x, y), (x, f(x))\big)$, то есть в этих пунктах мы будем считать, что расстояние между точкой и графиком функции ищется как расстояние между двумя точками, имеющими одинаковую абсциссу.

1. Пусть $\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ и $F(0; 1)$. Нарисуйте параболу и/или упростите её уравнение, если а) $f(x) = -1$; б) $f(x) = 1$; в) $f(x) = x$; г) $f(x) = x + 1$; д) $f(x) = |x + 1|$; е) $f(x) = x^2$.

2. Решите все подпункты пункта 1, если а) $\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$; б) $\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$.

В пунктах 3 и 4 под расстоянием между фиксированной точкой A и некоторым множеством точек $\mathcal{B}$ будем понимать $\min\{\rho(A, B) | B \in \mathcal{B}\}$.

3. Решите пункты 1в)–1е), исходя из нового понимания расстояния между точкой и графиком функции, и различных метрик.

4. Нарисуйте параболу для расстояний из пунктов 1.–2., если $F(0;2)$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

В пунктах 5 и 6 под параболой будем иметь в виду геометрическое место точек равноудалённых от некоторого множества $\mathcal{F}$, которое будем называть *множеством фокусов*, и множества $\mathcal{D}$, которое будем называть *направляющим множеством*. Под расстоянием между множествами $\mathcal{F}$ и $\mathcal{D}$ будем понимать $\min\{\rho(F,D)|F\in\mathcal{F},D\in\mathcal{D}\}$.

5. Изобразите параболу для расстояний между точками из пунктов 1.–3., если
а) $\mathcal{F}=\{(0;1)\}$, $\mathcal{D}=\{(0;-1)\}$; б) $\mathcal{F}=\{(-1,1),(1,1)\}$, $\mathcal{D}=\{(0,0)\}$; в) $\mathcal{F}=\{(-1,1),(1,1)\}$, $\mathcal{D}=\{(-1,-1),(1,-1)\}$.

6. Можно ли подобрать такие конечные множества точек $\mathcal{F}$ и $\mathcal{D}$, что парабола а) будет ограниченной, б) самопересекаться, в) замкнутой? Можно ли по графику параболы на координатной плоскости, зная что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{D}$ — конечные множества точек, определить координаты всех точек во множествах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{D}$.

7. Предложите свои обобщения в этой задаче и изучите их.

Задача № 9. Сдвиг цифр

Пусть $M=\{a_0,a_1,\dots,a_9\}$, где $a_0<a_1<\dots<a_9$ — целые числа, которые мы будем называть цифрами. Натуральные числа будем записывать в десятичной системе счисления, но будем использовать цифры из набора M. Для удобства записей, для чисел 10, 11, 12, … будем использовать буквы латинского алфавита A, B, C, ... соответственно, а для записи чисел –1, –2, –3, …, –9, –10, … будем использовать $\bar{1},\bar{2},\bar{3},\dots,\bar{9},\bar{A},\dots$. Например, запись $1A2$ означает число $1\cdot10^2+A\cdot10^1+2\cdot10^0=1\cdot100+10\cdot10+2=202$ в привычной для нас десятичной записи. А запись $\bar{1}5\bar{2}$ означает число $-1\cdot10^2+5\cdot10+(-2)\cdot10^0=-100+50-2=-52$ в привычной для нас десятичной записи.

1. Пусть $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,A\}$. а) Запишите число 2023, используя указанные цифры. б) Докажите, что любое натуральное число можно записать, используя эти цифры. в) Существуют ли такие натуральные числа, которые, используя эти цифры, можно записать не одним способом?

2. Пусть $M=\{\bar{1},0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. а) Запишите число 2023, используя указанные цифры. б) Можно ли любое натуральное число можно записать, используя эти цифры? в) Существуют ли такие натуральные числа, которые, используя эти цифры, можно записать не одним способом?

3. Пусть $M=\{2,3,4,5,6,7,8,9,A,C\}$. а) Запишите число 2023, используя указанные цифры. б) Можно ли любое натуральное число, большее 13, можно записать, используя эти цифры? в) Существуют ли такие натуральные числа, которые, используя эти цифры, можно записать не одним способом?

4. Пусть $M = \{a_i | a_i = i + t\}$, где $0 \le i \le 9$, а t — произвольное фиксированное целое число (при $t = 1$, получаем цифры из первого пункта; при $t = -1$, получаем цифры из второго пункта). При каких значениях t используя цифры из набора M а) можно записать все натуральные числа, начиная с некоторого числа $N(t)$; б) записать все целые числа (без использования знака минус)?

Далее в пунктах 5, 6 и 7.б) рассматриваются системы счисления с основанием b.

5. Пусть $b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}$ — основание системы счисления, t — произвольное целое число, $M = \{a_i | a_i = i + t\}$, где $0 \le i \le |b| - 1$. При каких значениях $t(b)$ используя цифры из набора M а) можно записать все натуральные числа, начиная с некоторого числа N; б) записать все целые числа (без использования знака минус)?

6. Какие условия должны быть на конечный набор целых чисел a_i (не обязательно последовательных) таких, чтобы любое натуральное число, большее некоторого натурального числа N, в системе счисления с основанием b, можно было записать, используя набор цифр a_i? (Обратите внимание, что в этом пункте не требуется однозначность записи чисел и нет ограничения на количество цифр.)

7. Существует ли такой набор цифр c_1, c_2, …, c_k, $c_i \in (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}) \cup \{0\}$, используя который можно записать любое натуральное число а) в десятичной системе счисления, б) в системе счисления с основанием $b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}$? А если набор c_1, c_2, …, c_k выбирается из $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$?

<u>Задача 10. Зимний городок</u>

1. В одном зимнем городе 5 домов. От каждого дома к каждому идет ровно одна дорожка. В одном из домиков живет мэр городка Вася, который также занимается уборкой снега. После того как выпадает снег, Вася выезжает из своего домика и чистит все дорожки. Он проезжает по каждой дорожке ровно один раз и возвращается домой. Дорожки не пересекаются вне домиков (можем считать, что на визуальном пересечении одна дорожка по мосту проходит над другой). Сколькими способами Вася может почистить снег на всех дорожках в городе? Способы 1, 2, 3 и 3, 2, 1 – считаются разными.
2. Решите предыдущий пункт, если в городе 7 домов, n домов.
3. После того как Вася почистит все дорожки, его жена Маша идет по домам продавать пирожки. Она выходит из своего дома, проходит каждый дом ровно один раз, предлагая в каждом купить пирожки и возвращается домой. Сколько способов есть у Маши реализовать пирожки если в городе будет n домов и как в первых двух пунктах дорожки будут между всеми домами? (Если для каких-то n Вася не может выполнить свою работу, то

считаем, что Вася при расчистке дорог по каким-то проехал два раза и перед тем как его жена выходит разносить пирожки все дорожки расчищены). Предположим Маша выходит в тот момент пока Вася не дочистил 1, 2, 3 или 4 дорожки и Маша проходит от одного дома к другому за то же время, что Вася расчищает одну дорожку. Сколько способов обойти дома будет у Маши?

4. Здесь и ниже будем считать, что в городке имеется некоторое натуральное число n домов, причем дорожки проложены так, что из любого дома можно попасть в любой другой, возможно, проходя через другие дома, но при этом необязательно все дома попарно соединены дорожками. Будем в дальнейшем называть схемой города правило (рисунок или описание), которое указывает, как дорожки соединяют дома в городе.

   а) Существует ли схема, в которой у Маши ровно 4 способа обойти все дома, а у Васи больше, чем k способов почистить дорожки для любого натурального k, большего 4?

   а) Существует ли схема, в которой у Маши ровно 4 способа обойти все дома, а у Васи больше k способов почистить дорожки для любого натурально k больше 4?

   в) Существуют ли схемы, для которых при заданных натуральных k > m > 4 у Маши не более m способов обойти все дома, а у Васи больше k способов почистить дорожки?

5. Пусть теперь в городе n домов, которые соединены по принципу кольцевой дороги (будем говорить далее «*цикла*»), т.е. все дома можно перенумеровать по порядку X_1, X_2, X_3, …, X_n так, что дорожками соединены все дома X_m и X_{m+1}, $m = 1, 2, 3, \dots n{-}1$, а также X_n и X_1. Дополнительно три домика, которые не являются соседями в описанном – *основном цикле,* попарно соединены дорожками. Других дорожек в схеме города нет. Сколько способов почистить дорожки в этом городе есть у Васи, и сколько маршрутов у Маши?

6. Тот же вопрос, что и в пункте 5, но дополнительными дорожками соединены не три дома, а k домов, попарно не являющихся соседями в основном цикле; при этом дополнительные дорожки тоже образуют отдельный цикл? Исследуйте данный вопрос в двух формулировках:

   а) указанные k домов в основном цикле идут в той же последовательности, что и в отдельном цикле (разумеется, в основном цикле между этими домиками есть еще какие-то домики).

   б) указанные k домов в основном цикле идут в некоторой другой последовательности (ср. схемы на рис. 1).

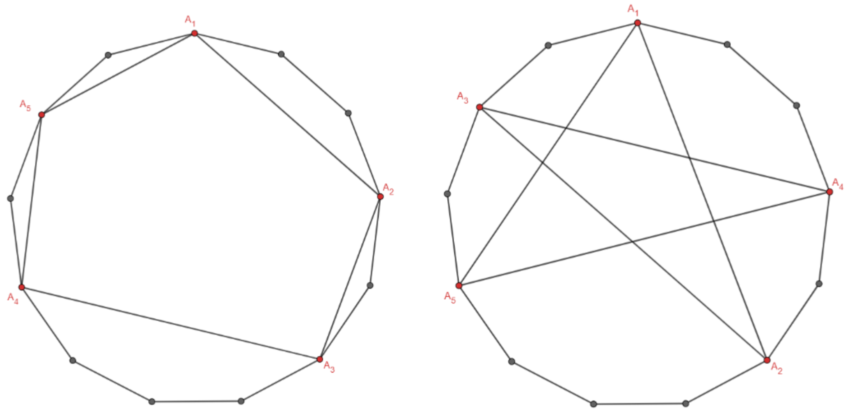


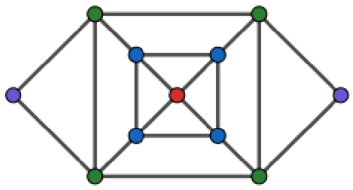
Рисунок 1. Схемы городов при n=13, k=5. Слева для пункта а), справа для пункта б).

7. Сколько способов сделать свою работу есть у Васи и у Маши, если в отличие от пункта 7 дополнительные дорожки образуют два треугольника? В частности, рассмотрите следующие варианты:

   а) k = 4; дополнительными дорожками соединены дома A, B, C и D (т.е. A, B, C и D – это некоторые дома из множества домов X_1, X_2, X_3, …, X_n), причем дополнительные дорожки – это AB, BC, CA, BD, DA.

   б) k = 5; дополнительными дорожками соединены дома A, B, C, D и E (т.е. A, B, C, D и E – это некоторые дома из множества домов X_1, X_2, X_3, …, X_n), причем дополнительные дорожки – AB, BC, CA, AD, DE, EA.

   в) k = 6; дополнительными дорожками соединены дома A, B, C, D, E, F (т.е. A, B, C, D, E, F – это некоторые дома из множества домов X_1, X_2, X_3, …, X_n), причем дополнительные дорожки – AB, BC, CA, DE, EF, DF.
8. Сколько способов сделать свою работу есть у Васи и Маши, если в цикле в отличии от пункта 7 будет два цикла $A_1A_2…A_kA_1$ и $A_1A_2…A_mA_1$ (здесь все A_p – это дома из множества X_1, X_2, X_3, …, X_n)? Попробуйте исследовать данный пункт в различных формулировках: если у циклов нет общих вершин и порядок вершин схож с порядком в основном цикле, нет общих вершин и порядок вершин любой, у циклов ровно одна общая вершина, общих вершин несколько.
9. Пусть теперь в городе 11 домиков и схема города показана на рисунке. Вася и Маша живут в доме, являющемся центром симметрии схемы города. Сколько способов у Васи и у Маши выполнить свою работу?



10. Придумайте свои направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 11. Графы и биоинформатика

Предлагаемая задача возникла в области биоинформатики. Исходная постановка задачи такова: имеется множество людей, недавно заразившихся некоторым инфекционным заболеванием. Требуется восстановить историю распространения эпидемии, т. е. установить, с кого началась инфекция, и кто кого заразил (на практике с использованием молекулярного анализа можно установить возможные пары участников процесса заражения).

Математически данную задачу можно сформулировать в терминах теории графов. Дан граф G, вершины которого ассоциируются с заболевшими, две вершины u и v смежны в графе G тогда и только тогда, когда возможна передача вируса от u к v или наоборот. Требуется найти связный остовный подграф графа G, который описывает историю распространения эпидемии. Как правило полагается, что один и тот же человек не может быть заражён дважды, поэтому можно считать, что искомый связный остовный подграф не содержит циклов, т. е. является остовным деревом.

Важную роль в построении математической модели задачи играет тот факт, что реальные графы, ассоциированные с вирусными заражениями (ВИЧ, Гепатит С), являются так называемыми scale-free графами (безмасштабными графами), обладающими рядом свойств, таких как степенной закон распределения степеней вершин, наличие вершин большой степени, малый диаметр. Хорошей теоретико-графовой мерой того, насколько граф G с множеством рёбер $E(G)$ близок к scale-free, служит следующая известная s-метрика графа G:

$$s(G)=\sum_{\{u,v\}\in E(G)} \deg_G u\cdot\deg_G v,$$

где через $\deg_G x$ обозначена степень вершины x в графе G. Графы с наибольшим значением s-метрики наиболее вероятно являются scale-free и, следовательно, возвращаясь к задаче, наиболее вероятно описывают историю распространению инфекции.

Следующий параметр, связанный с s-метрикой, назовём SF-размерностью графа G, будем обозначать его через $\tau(G)$ и определим равенством

$$\tau(G)=\max_T\{s(T)\},$$

где максимум берётся по всем остовным деревьям T графа G. Как было отмечено выше, остовы с наибольшим значением s-метрики наиболее вероятно описывают историю распространения инфекции. Остовное дерево графа G с наибольшим значением s-метрики будем называть оптимальным остовом.

Исследуйте следующие вопросы.

1) Определите значение параметра $s(G)$ для каждого из следующих графов: простая цепь P_n, простой цикл C_n, полный граф K_n, полный двудольный граф $K_{m,n}$, полный многодольный граф $K_{m_1,m_2,\dots,m_k}$ (предложите наиболее компактную запись для $s(K_{m_1,m_2,\dots,m_k})$).

2) Для графа G обозначим: $d(v)=\deg_G v$ и $f(v)=\sum_{w\in N_G(v)} \deg_G w$, где $N_G(v)$ – окружение вершины v в графе G; $\boldsymbol{A}(G)$ – матрица смежности и $\boldsymbol{d}$ – вектор степеней графа; $t(G)$ – число треугольников и $\gamma_i(G)$ – число простых цепей длины i в графе. Докажите, что имеют место следующие комбинаторные соотношения для параметра $s(G)$:

а) $s(G)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d(v)\cdot f(v)$;

б) $s(G)=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\cdot \boldsymbol{A}(G)\cdot \boldsymbol{d}$;

в) $s(G)=t(G)+\gamma_3(G)+2\gamma_2(G)+\gamma_1(G)$.

Предложите свои соотношения для s-метрики $s(G)$ в терминах других параметров графа G.

3) Обозначим через $ML(G)$ множество всех остовных деревьев графа G с наибольшим числом листьев (вершин степени 1). Пусть

$$l(G)=\max_{T\in ML(G)} s(T).$$

Понятно, что $\tau(G)\ge l(G)$. Верно ли, что $\tau(G)=l(G)$, т. е. оптимальный остов графа G является остовом с наибольшим числом листьев?

4) Если в пункте 3 задачи ответ на поставленный вопрос окажется отрицательным, постройте бесконечную серию соответствующих контрпримеров и изучите в общем случае поведение разности $\tau(G)-l(G)$. Например, ответьте на вопрос: может ли данная разность быть сколь угодно большим числом?

5) Докажите, что для произвольного графа G порядка n справедливы оценки $4n-8\le\tau(G)\le(n-1)^2$. Попробуйте охарактеризовать все графы G, для которых нижняя (соответственно, верхняя) оценка достижима.

6) Пусть на (n, m)-графе G (граф с n вершинами и m рёбрами) достигается максимально возможное значение $s(G)$. Докажите, что для любой пары вершин $u, v\in V(G)$ верно $N_G(u)\subseteq N_G(v)\cup\{v\}$ или $N_G(v)\subseteq N_G(u)\cup\{u\}$.

7) Основываясь на результате пункта 6, изучите структуру (n, m)-графа G с экстремальным значением параметра $s(G)$. Например, докажите, что такой граф не может содержать порождённых подграфов $2K_2$, P_4 и C_4. Какими другими структурными свойствами обладает такой граф G?

8) Пусть на (n, m)-графе G достигается максимально возможное значение $s(G)$ и пусть v – доминирующая вершина этого графа. Может ли граф, полученный из G удалением вершины v и всех инцидентных ей рёбер, содержать порождённый подграф $K_{1,3}$?

9) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Общие понятия теории графов, не определяемые в задаче, можно найти в книге [Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах: Более 250 задач с подробными решениями. Изд. 7-е. – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 240 с.].

Из правил проведения республиканских турниров юных математиков

Утверждено 25.11. 2014 года

Турнир юных математиков – командные соревнования учащихся в умении решать математические задачи исследовательского характера, грамотно и убедительно представлять полученные результаты, аргументированно отстаивать свою точку зрения в публичных дискуссиях.

Часть 1. Подготовка турнира

10. По прибытии на турнир команды проходят *регистрацию*, во время которой сдают в жюри турнира свои окончательные материалы в четырех экземплярах.

10.1. Команда не имеет права вносить изменения в свои окончательные материалы после их сдачи в жюри турнира.

Часть 2. Порядок проведения турнира

15. Для планирования турнира и разрешения спорных ситуаций, возникающих при его проведении, используется корректируемый рейтинг команд.

Рейтинг каждой команды – это величина, аккумулирующая результаты, получаемые командой в ходе турнира, и призванная отражать ее относительную силу в ряду других участников.

15.1. После окончания регистрации участников турнира каждой команде присваивается *стартовый рейтинг*, исчисляемый на основе рассмотрения и оценки предварительных материалов команды по формуле $\mathbf{R_{ст} = 0{,}5 \cdot S_к / S_{ср}}$,
где $\mathbf{R_{ст}}$ – стартовый рейтинг команды, $\mathbf{S_к}$ – сумма баллов, полученных командой за предварительные материалы, $\mathbf{S_{ср}}$ – среднее арифметическое сумм баллов, выставленных за предварительные материалы командам, прибывшим на турнир.

15.2. После подведения итогов каждого тура турнира производится корректировка рейтинга участвовавших в нем команд. Для этого текущее значение рейтинга каждой команды увеличивается на приращение ее рейтинга за прошедший тур $\mathbf{R_T}$, определяемое по формуле $\mathbf{R_T = S_{Tк} / S_{Tср}}$,

где **T –** обозначение тура; $\mathbf{S_{Tк}}$ – сумма баллов, полученных командой в этом туре, $\mathbf{S_{Tср}}$ – среднее арифметическое сумм баллов, полученных командами, участвовавшими в этом туре на тех же основаниях. После письменного тура усреднение производится по всем участникам турнира. После отборочных туров и финала усреднение производится только по составу того боя, в котором участвовала команда. Суммы баллов, полученные командой в каждом отборочном туре или в финале, равны итоговым суммам баллов команды за соответствующий бой.

18. Первое, второе и последующие места в турнире присуждаются командам, занявшим соответствующие места в основном финальном бое. Участникам малого финала (в случае его проведения) присуждаются места, непосредственно следующие за местами, занятыми участниками основного финала. Остальные участники следуют за ними в порядке убывания своего окончательного рейтинга.

19. Победителями турнира признаются участники основного финального боя и команды, занявшие более высокие места в малом финале.

19.1. Решение об определении победителей и распределении дипломов первой, второй и третьей степени между ними принимает оргкомитет по предложению жюри турнира.

19.3. По решению оргкомитета определение победителей может быть произведено по правилам, отличным от правил, устанавливаемых пунктом 19.

Часть 3. Правила математического боя

21. Состав боя определяется полной схемой турнира. Порядок выступления команд в бое и обсуждаемые задачи определяются путем жеребьевки. Жеребьевка каждого боя проводится в два этапа, отдельно от жеребьевки других боев.

21.1. На первом этапе жеребьевки определяется порядок выступлений участников с докладами в каждом бое. Команды тянут жребий в порядке, обратном их расположению в составе боя согласно полной схеме турнира, т.е. в порядке возрастания показанных ранее результатов. При жеребьевке финальных боев результатом считается значение текущего рейтинга. После этого состав, распределение ролей и порядок выступлений оппонирующих участников каждого раунда определяется по схеме боя.

21.2. На втором этапе определяются задачи, докладываемые участниками боя. Порядок участия команд в этом этапе жеребьевки совпадает с порядком их выступления с докладами (т.е. с порядком их номеров в схеме боя).

На втором этапе жеребьевки любая команда имеет право заявить *отказ*, т.е. отказаться от выпавшей ей задачи. После отказа команда переходит в конец очереди на жеребьевку, а вынутый номер задания возвращается на место. Количество разрешенных отказов команды определяется решением жюри турнира и сообщается командам во время регистрации. Каждый отказ сверх этого разрешенного количества штрафуется снижением ролевого коэффициента за доклад на 0,5.

Если на втором этапе жеребьевки команда вновь получает задание, от которого она уже отказывалась, то она может согласиться с ним или повторно отказаться – при этом отказ не засчитывается в общее число отказов команды.

21.3. В любом бою команда не может докладывать задачи, уже доложенные ею в ранее проведенных боях. В случае выпадения такой задачи при жеребьевке команда тянет жребий повторно, а карточка с номером этой задачи возвращается на место после того, как команда согласилась с новой вытянутой задачей или отказалась от нее.

22. После окончания жеребьевки всем оппонирующим участникам каждого раунда боя выдаются материалы, предоставленные соответствующими Докладчиками, для изучения и подготовки письменных отзывов и устных выступлений по ним. В этой подготовке может участвовать руководитель команды.

24. Во всех боях, кроме финальных, присутствие во время боя руководителей команд, участвующих в бое, допускается только в исключительных случаях и с согласия председателя жюри турнира. В финальных боях руководители команд должны находиться отдельно от своих команд.

25. Порядок прохождения и регламент действий в каждом раунде

Обязательные действия		
1	**Перерыв. Проветривание помещения.** **Совещание жюри боя.** **Подготовка Докладчика к докладу**	12 мин (*или более, в пределах времени, отведенного на раунд*)
2	Объявление оценок предыдущего раунда, либо представление жюри боя (в первом раунде)	до 5 мин
3	Выступление Докладчика с докладом	до 10 мин
4	Вопросы Оппонента Докладчику и ответы Докладчика, выступление Оппонента, ответ Докладчика на выступление Оппонента	до 10 мин

5	Вопросы Рецензента Докладчику и Оппоненту, ответы Докладчика и Оппонента, выступление Рецензента	до 7 мин
Необязательные действия		
6	Выступления Наблюдателя или выступление первого Наблюдателя(Н1)	до 2 мин
7	Выступление второго Наблюдателя(Н2)	до 2 мин
8	Заключительное выступление Рецензента	до 2 мин
9	Заключительное выступление Оппонента	до 2 мин
10	**Заключительное слово Докладчика**	до 3 мин
11	Вопросы членов жюри, ответы участников боя, комментарии членов жюри	до 5 мин
Итого, время одного раунда вместе с перерывом		не более 60 мин

26. Обязанности участников боя (*см. также Памятку и советы командам и членам жюри*)

26.1. Докладчик в своем основном выступлении должен кратко, но максимально полно и четко изложить результаты, полученные командой по задаче, дать ясное представление о методах, которыми они получены. Результатами могут являться как конкретные утверждения, так и метод решения, придуманный командой, или способ применения тех или иных методов (утверждений) к решению других задач, или даже специально построенный контрпример. В заключение доклада необходимо сделать резюме – кратко сформулировать важнейшие результаты. Докладчик должен стремиться к тому, чтобы его выступление было понятно аудитории.

Доклад команды должен соответствовать окончательным материалам по обсуждаемому заданию (п. 6) за исключением исправлений обнаруженных несущественных ошибок. В последнем случае это должно быть специально оговорено в выступлении.

26.2. Все оппонирующие команды каждого боя не менее чем за 30 мин до начала боя должны сдать в жюри письменные отзывы на предоставленные им материалы Докладчиков этого боя. Объем отзыва не должен превышать двух страниц формата А4 и должен содержать конкретные комментарии и замечания к докладу, удовлетворяющие требованиям п. 26.3.

26.3. Оппонент в своем выступлении дает оценку доклада, указав важнейшие с его точки зрения результаты, степень их обоснованности (доказанности), существенные и несущественные неточности в доказательствах, неверные утверждения (если таковые имеются). При этом необходимо использовать следующую шкалу оценок:

* верный и правильно доказанный результат,
* верный результат с несущественными ошибками в доказательстве,
* верный, но недоказанный результат (доказательство отсутствует или в нем допущены серьезные ошибки),
* сомнительный результат (и, разумеется, недоказанный),
* неверный результат.

26.4. Рецензент в своем выступлении оценивает, во-первых, выступление Оппонента: объективность оценки им доклада и его результатов, существенность и корректность заданных вопросов, а во-вторых – ответы Докладчика: их четкость, убедительность, находчивость. В случае необходимости Рецензент дает свою оценку доклада (например, если его оценка не совпадает с общей оценкой Оппонента, или в докладе есть недостатки, не замеченные Оппонентом, и т.п.).

26.5. Каждая команда-Наблюдатель имеет право на участие в дискуссии, если у нее имеются существенные дополнения или замечания, вызванные ходом дискуссии и не указанные Докладчиком, Оппонентом и Рецензентом. Выступления Наблюдателей должны удовлетворять требованиям пп. 26.3 и(или) 26.4. Малосодержательные выступления Наблюдателей, необоснованно затягивающие дискуссию, могут получить отрицательную оценку, снижающую итоговую сумму баллов команды.

26.6. Оппонент и Рецензент в своих основных выступлениях не представляют собственных результатов по обсуждаемой задаче, за исключением тех случаев, когда это служит аргументом в полемике (например, если по представленным материалам трудно судить о достоверности доказательств, а собственные результаты противоречат утверждениям Докладчика). Собственные идеи и результаты могут быть кратко описаны в заключительных выступлениях Оппонента, Рецензента, а также в выступлениях Наблюдателей. Жюри не обязано учитывать количество и качество результатов, полученных Оппонентом, Рецензентом и Наблюдателями по данной задаче, при выставлении окончательных оценок командам.

26.8. Право участвовать в дискуссии имеет только один представитель команды – непосредственно докладчик, оппонент и рецензент. Команда может вмешаться в ход дискуссии (задать вопрос или сделать выступление с места) только в двух случаях:

- по просьбе выступающего,
- по просьбе капитана команды.

В обоих случаях выступающий или капитан обращаются за разрешением к председателю жюри боя; выступление с места можно начинать только после его разрешения.

26.9. Жюри боя не является участником боя. Члены жюри должны воздерживаться от участия в дискуссии между командами

27. Действия участников боя в каждом раунде оцениваются по следующим критериям: выполнение командами требований пункта 26 правил, умение команд представить и защитить результаты своих исследований, способность правильно оценить результаты других участников, грамотно, убедительно и корректно вести дискуссию.

Кроме того, при оценке доклада жюри должно принимать во внимание количество и качество результатов, полученных Докладчиком при выполнении задания с учетом его сложности.

28. Выставление оценок и определение результатов боя

Жюри боя определяет результаты каждого раунда и математического боя в целом посредством выставления оценок каждому из его участников. Эти оценки должны основываться на критериях п. 27.

28.1. После завершения действий текущего раунда каждый член жюри боя выставляет всем участникам боя оценки за дискуссию, а оппонирующим участникам, кроме того, – оценку за письменный отзыв в пределах, установленных п. 28.3. Выставленные оценки за каждый раунд, кроме последнего, сообщаются участникам боя перед началом следующего раунда. Оценки за последний раунд, а также результаты боя в целом сообщаются участникам не позднее, чем через 45 минут после окончания боя. Каждый член жюри объявляет свою оценку лично и заносит ее в протокол.

28.2. Оценки**,** выставленные командам членами жюри, переводятся в баллы по правилам п. 28.3 и суммируются. Полученная сумма называется *итоговым баллом команды за раунд*. После завершения боя полученные командой итоговые баллы за все раунды суммируются. Полученная сумма называется *итоговой суммой баллов за бой* и используется при подведении итогов боя (п. 29), а также для корректировки текущего рейтинга команды.

28.3. Пределы оценок, выставляемых участникам боя, и перевод оценок в баллы

	Оценка за письменный отзыв x	Оценка за дискуссию y	Ролевой коэффициент (*применяется только к оценке за дискуссию*) k	Балл, выставляемый команде
Докладчик	–	$0 \le y \le 10$	$k = 3$ (*или менее)*	ky
Оппонент	$0 \le x \le 5$	$0 \le y \le 5$	$k = 2$	$x + 2y$
Рецензент	$0 \le x \le 5$	$0 \le y \le 5$	$k = 1$	$x + y$
Наблюдатель	$0 \le x \le 5$	$-3 \le y \le 5$	$k = 1$	$x + y$

28.5. При определении результатов финальных боев в итоговую сумму баллов команды за бой кроме баллов, полученных в ходе боя включается *турнирный балл*, получаемый умножением текущего рейтинга команды (определенного на момент начала финального боя) на число учитываемых оценок в финальном бое и на турнирный коэффициент, равный 5.

29. Подведение итогов боев

29.1. Первое место в математическом бое присуждается команде, набравшей наибольшую итоговую сумму баллов за бой (п. 28.2), а также всем командам, набравшим не менее 95% от этой суммы.

29.2. Последующие места присуждаются командам с меньшими итоговыми суммами баллов в порядке убывания; при этом командам присуждаются одинаковые места, если несколько команд имеют не менее 95% от суммы, набранной первой из них.

30. Если первое место в бою присуждено только одной команде, то такое первое место называется единоличным, а команда, занявшая его, считается абсолютным победителем этого боя.

XXV Республиканский турнир юных математиков

№ п/п	Команда	Предвари-тельные материалы		Письменный (0-й) тур			R - тек.	Место – тек.	Отборочные бои 1-го тура			
		Баллы	$R_{пред}$	Баллы	R_0	Место			№ боя	Баллы	R_1	Место
1	Гимназия № 41 г. Минска	129,00	0,69						А			
2	Сборная Лицея БГУ и Гимназии №8 ***г.Витебска***	111,00	0,59						Б			
3	Лицей БНТУ	109,00	0,58						В			
4	СУНЦ Новосибирского ГУ	107,75	0,57						В			
5	Сборная **Гомельской обл.**: гимназии №№ 51, 56, 71 г.Гомеля, СШ №44 г.Гомеля, СШ №9 г.Мозыря	101,50	0,54						Б			
6	**Сборная г.Минска**: гимназии №№ 11, 50, 24, 41, 39, 36	99,75	0,53						А			
7	Сборная Лицея БГУ и Гимназии №10 г.Минска	97,75	0,52						А			
8	Сборная **Минской обл.**: Боровлянская гимназия, Гимназия №1 г.Слуцка и МГОЛ	91,25	0,49						Б			
9	Смолевичская районная гимназия	82,75	0,44						В			
10	ЛНМО, г.Санкт-Петербург	76,50	0,41						В			
11	Сборная СШ № 12 г.Новополоцка и Гимназия №2 г.Новополоцка	70,70	0,38						Б			
12	СШ №2 г.Толочина	48,25	0,26						А			

4-9 декабря 2023 **Результаты турнира**

R - тек.	Место – тек.	Отборочные бои 2-го тура				R - тек.	Место – по рейт.	Сумма мест в отборочных боях	Финалы Основной Малый			
		№ боя	Баллы	R_2	Место				Баллы / $R_ф$	$R_{ОК}$	Ок. Место	ДИПЛОМ

ОРГАНИЗАТОРЫ ТУРНИРА

Министерство образования Республики Беларусь

Белорусский государственный университет

– ведущий университет классического типа в системе национального образования
Веб-сайт: http://www.bsu.by
Адрес: пр. Независимости, 4, г. Минск, 220030

Факультет прикладной математики и информатики (ФПМИ):

- тел.: +375 17 209-52-45,
- тел./факс: +375 17 226-55-48,
- веб-сайт: http://www.fpmi.bsu.by
- e-mail: dean_office_FPMI@bsu.by

Научно-исследовательский и учебно-методический центр преподавателей и учащихся «ЮНИ-центр-XXI» ФПМИ БГУ

- тел.: +375 17 209-50-70,
- тел.: +375 17 209-54-05,
- веб-сайт: http://www.uni.bsu.by
- e-mail: uni-centre@bsu.by

Государственное учреждение образования «Минский областной институт развития образования»

– учреждение дополнительного образования для взрослых, которое успешно сочетает в себе функции повышения квалификации кадров и развития областной системы образования.

Адрес: ул. П.Глебки, 88, г. Минск, 220104,

- телефон: +375 17 365-45-72
- тел./факс: +375 17 216-97-10
- e-mail: mail@moiro.by

Наши координаты:

Координатор оргкомитета от БГУ Задворный Б. В.,
ФПМИ БГУ, пр. Независимости, 4, Минск,
220030, Республика Беларусь
Тел./факс: +375 17 209-50-70
Тел.: +375 29 172-14-41 (Задворный Борис Валентинович)
E-mail: zadvorny2014@mail.ru, uni-centre@bsu.by