

Инварианты-перекраски

1. В клетках таблицы 4×4 расставлены знаки «+» и «-» (см. рисунок). Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что такими операциями нельзя получить таблицу с одними плюсами. Сколько различных таблиц можно получить из исходной с помощью разрешенных операций?
- | | | | |
|---|---|---|---|
| + | - | + | + |
| + | + | + | + |
| + | + | + | + |
| + | + | + | + |
2. Пусть дана таблица 4×4 , в каждой клетке стоит «+» или «-», за один ход разрешается менять все знаки в одной строке или в одном столбце на противоположные. Наименьшее число минусов, к которому можно прийти, называется характеристикой данной таблицы. Найти все возможные значения характеристики таблицы 4×4 .
3. *** В вершинах правильного n -угольника с центром в точке O расставлены числа $(+1)$ и (-1) . За один шаг разрешается изменить знак у всех чисел, стоящих в вершинах какого-либо правильного k -угольника с центром O (при этом мы допускаем и 2-угольники, понимая под 2-угольником отрезок с серединой в точке O). При а) $n = 15$; б) $n = 30$; в) произвольном натуральном n , большем 2, рассмотрите следующие вопросы: **Вопрос 1.** Докажите, что существует первоначальная расстановка, из которой нельзя получить набор из одних единиц. **Вопрос 2.** Попробуйте найти или оценить число $K(n)$ различных расстановок $(+1)$ и (-1) , среди которых ни одну нельзя получить из другой. Докажите, например, что $K(200) = 2^{80}$.

Инварианты-таблицы

4. В каждую клетку таблицы 8×8 вписано целое число. За один ход разрешается выбрать любой квадрат 4×4 или 3×3 и прибавить 1 к каждому числу в этом квадрате. Всегда ли вы можете получить таблицу, все числа в которой кратны а) 2; б) 3?
5. Дан квадрат 5×5 . Можно ли вписать в каждую его клетку по числу таким образом, чтобы сумма чисел во всем квадрате была положительной, а сумма чисел в любом квадрате 2×2 , 3×3 , 4×4 была отрицательной?
6. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трех клеток, не выходящими за его пределы, в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам?
7. На шахматной доске $N \times N$ стоят N^2 шашек. Можно ли их переставить так, чтобы любые две шашки, отстоявшие на ход коня, после перестановки отстояли друг от друга лишь на ход короля (то есть стояли рядом)? Рассмотрите два случая: а) $N = 3$; б) $N = 8$.

Разные инварианты

8. В правильном десятиугольнике проведены все диагонали. Возле каждой вершины и возле каждой точки пересечения диагоналей поставлено число $+1$ (рассматриваются только сами диагонали, а не их продолжения). Разрешается одновременно изменить все знаки у чисел, стоящих на одной стороне или на одной диагонали. Можно ли с помощью нескольких таких операций изменить все знаки на противоположные?
9. Фишка ходит по квадратной доске, каждым своим ходом сдвигаясь либо на клетку вверх, либо на клетку вправо, либо по диагонали вниз-влево. Может ли она обойти всю доску, побывав на всех полях ровно по одному разу, и закончить на поле, соседнем справа от исходного?
10. Дан выпуклый $2n$ -угольник $A_1 \dots A_{2n}$. Внутри него взята точка P , не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что точка P принадлежит чётному числу треугольников с вершинами в точках $A_1, \dots, A_{2n}$.
11. Двадцать пять монет раскладывают по кучкам следующим образом. Сначала их произвольно разбивают на две группы. Затем любую из имеющихся групп снова разбивают на две группы, и так далее до тех пор, пока каждая группа не будет состоять из одной монеты. При каждом разбиении какой-либо группы на две записывается произведение количеств монет в двух получившихся группах. Чему может быть равна сумма всех записанных чисел?
12. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные – не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.