

1. Пусть дана таблица 4×4 , в каждой клетке стоит «+» или «-», за один ход разрешается менять все знаки в одной строке или в одном столбце на противоположные. Предположим, что имеются два расположения знаков, обладающих следующим свойством: для любого квадрата 2×2 четность числа плюсов в этом квадрате у первой раскраски такая же, как и у числа плюсов в этом квадрате у второй раскраски. Означает ли это, что первую раскраску можно привести ко второй?
2. Дана таблица 8×8 , в клетках которой стоят знаки «+» и «-». За один ход разрешается менять все знаки в любом квадрате 3×3 на противоположные. Сколько различных расстановок можно получить из исходной?
3. Пусть дана таблица 4×4 , в каждой клетке стоит «+» или «-», за один ход разрешается менять все знаки в одной строке или в одном столбце на противоположные. Наименьшее число минусов, к которому можно прийти, называется характеристикой данной таблицы. Найти все возможные значения характеристики таблицы 4×4 .
4. Каждое из n чисел a_i равно $+1$ или -1 , причем $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$. Докажите, что число n кратно 4. А если заменить равенство на $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \dots + a_na_1a_2a_3 = 0$?
5. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трех клеток, не выходящими за его пределы, в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам?
6. Фишка ходит по квадратной доске, каждым своим ходом сдвигаясь либо на клетку вверх, либо на клетку вправо, либо по диагонали вниз-влево. Может ли она обойти всю доску, побывав на всех полях ровно по одному разу, и закончить на поле, соседнем справа от исходного?
7. На шахматной доске $N \times N$ стоят N^2 шашек. Можно ли их переставить так, чтобы любые две шашки, отстоявшие на ход коня, после перестановки отстояли друг от друга лишь на ход короля (то есть стояли рядом)? Рассмотрите два случая: а) $N = 3$; б) $N = 8$.
8. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные – не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.
9. На банкете присутствует 200 гостей, у каждого из них не более 99 врагов. Докажите, что можно рассадить гостей за круглым столом так, чтобы никто не сидел рядом со своим врагом.
10. Дан выпуклый $2n$ -угольник $A_1 \dots A_{2n}$. Внутри него взята точка P , не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что точка P принадлежит чётному числу треугольников с вершинами в точках A_1, \dots, A_{2n} .
11. В правильном десятиугольнике проведены все диагонали. Возле каждой вершины и возле каждой точки пересечения диагоналей поставлено число $+1$ (рассматриваются только сами диагонали, а не их продолжения). Разрешается одновременно изменить все знаки у чисел, стоящих на одной стороне или на одной диагонали. Можно ли с помощью нескольких таких операций изменить все знаки на противоположные?
12. Двадцать пять монет раскладывают по кучкам следующим образом. Сначала их произвольно разбивают на две группы. Затем любую из имеющихся групп снова разбивают на две группы, и так далее до тех пор, пока каждая группа не будет состоять из одной монеты. При каждом разбиении какой-либо группы на две записывается произведение количеств монет в двух получившихся группах. Чему может быть равна сумма всех записанных чисел?
13. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешено заменять любым из трехчленов $x^2 f(1/x + 1)$ и $(x - 1)^2 f(1/(x - 1))$. Можно ли такими операциями получить из квадратного трехчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трехчлен $x^2 + 10x + 9$?
14. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратной последовательности. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы четна. Верно ли это же утверждение для n -значных чисел? Для каких n ?
15. В некоторой стране 100 городов. Имеется справочник, который содержит информацию о расстоянии между любыми парами городов (т. е. всего 4950 записей). Некоторое число записей потерялись. При каком наибольшем числе потерянных записей их можно гарантированно восстановить по остальным записям?