Сочетания без повторений

1. в)* $C_n^0 + C_n^1 + \ldots C_n^n = 2^n$; г) $C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}$;

   д) $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0$; е) $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots (C_n^n)^2$; ж) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$.
2. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду, если в ней может быть не более трех юношей?
3. У меня 7 друзей. Сколькими способами я могу приглашать их к себе обедать в течение 7 дней (по три друга каждый день) так, чтобы никакие три из них не встретились у меня дважды?
4. Сколькими способами можно разбить а) 10 человек на две команды по 5 человек; б) 15 человек на три команды по 5 человек? в) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек две команды по 5 человек?
5. Город имеет форму прямоугольника размером а) 3 × 4; б) $m \times n$ клеток. В нижнем левом углу живет почтальон, который каждый день ездит на почту, расположенную в правом верхнем углу. При этом он ездит лишь в направлениях «вверх» и «вправо» (т.е. в направлениях, приближающих, а не удаляющих его от почты). По скольким различным маршрутам он может доехать до почты?
6. Сколько существует 6-значных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?
7. * Улитка должна проползти вдоль линий клетчатой бумаги путь длины $2n$, начав и кончив свой путь в данном узле. Докажите, что число различных ее маршрутов равно $(C_{2n}^n)^2$.

Разные комбинаторные задачи

8. Сколькими способами можно разбить 7 девушек и 7 юношей на пары «девушка-юноша»?
9. Сколькими способами можно разбить 14 человек на пары?
10. а) Имеется 8 различных фотографий и 3 различных конверта. Сколько существует способов разложить фотографии по конвертам? б) А если при этом ни один из конвертов не должен оставаться пустым?
11. На клетчатом листе бумаги изображен квадрат, каждая сторона которого умещает ровно n клеток. Сколько в этом квадрате можно нарисовать различных а) квадратов; б) прямоугольников?
12. а) На плоскости отмечено 10 красных и 10 зеленых точек. Эти точки попарно соединяют отрезками так, что концы каждого отрезка – точки разного цвета и никакие два отрезка не имеют общих концов. Сколько существует способов такого соединения? б) Пусть теперь все 20 точек одного цвета. Снова соединяем все точки 10 отрезками так, что никакие два отрезка не имеют общих концов. Сколько существует способов такого соединения? в) На плоскости дано 20 точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует 19-звенных незамкнутых ломаных с вершинами в этих точках? (Ломаные могут самопересекаться.)
13. На плоскости проведено n прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). Они разбивают плоскость на части, ограниченные или неограниченные. а) Найдите число всех полученных фигур. б) Найдите число всех ограниченных фигур.
14. В выпуклом n-угольнике ($n \geq 4$) проведены все диагонали, причем никакие три из них не пересекаются в одной точке. а) Найдите число диагоналей; б)** Найдите число точек пересечения диагоналей; в)*** Найдите число частей, на которые они делят n-угольник.
15. На окружности отмечено 12 точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся одиннадцатизвенных ломаных с вершинами в этих точках?

Сочетания с повторениями. Метод шаров и перегородок

16. Сколькими способами 12 пятаков можно разложить по 5 различным кошелькам так, чтобы ни один кошелёк не оказался пустым? А если кошельки могут оставаться пустыми?
17. Сколькими способами можно переплести 12 одинаковых книг в красный, зелёный и синий переплёты?
18. В магазине продается 6 видов открыток. Сколько существует всевозможных способов купить 20 открыток?
19. Сколькими способами можно разложить в 9 лузах 7 белых и 2 чёрных шара? Часть луз может быть пустой, а лузы считаются различными.
20. Сколькими способами натуральное число N можно представить в виде суммы а) K натуральных слагаемых; б) K неотрицательных целых слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?
21. * а) За круглым столом короля Артура сидит 12 рыцарей. Каждый из них враждует с двумя своими соседями. Надо выбрать 5 рыцарей, чтобы отправить их в поход. Сколькими способами можно это сделать так, чтобы среди выбранных рыцарей не было врагов? б) Решите задачу в случае, когда за круглым столом сидит n рыцарей, а в поход нужно отправить k рыцарей.