

Простой вариант

- а) Придумайте такое четырехзначное число, что при замене любых трех его цифр любыми тремя другими не получится число, кратное 1992; б) сколько всего существует таких четырехзначных чисел?
- Дно прямоугольной коробки было выложено прямоугольными плитками размера 2×2 и 1×4 . Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли плитку размером 2×2 . Вместо нее нашли плитку размером 1×4 . Можно ли теперь выложить дно коробки?

Сложный вариант

- Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

Примечание. Давайте считать, что, если число содержит в своей десятичной записи цифру 0, то можно вычеркиванием остальных цифр получить из него число 0, делящееся на 11.

- Клетки таблицы 200×200 окрашены в черный и белый цвета так, что черных клеток на 404 больше, чем белых. Докажите, что найдется квадрат 2×2 , в котором число белых клеток нечетно.

Задачи, общие для простого и сложного вариантов

- Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. На продолжении стороны AB откладывается отрезок $BM = AB$, на продолжении стороны BC – отрезок $CN = BC$, на продолжении стороны CD – отрезок $DP = CD$, на продолжении стороны DA – отрезок $AQ = AD$. Доказать, что площадь четырехугольника $MNPQ$ в 5 раз больше площади четырехугольника $ABCD$.

- Десять спортсменов участвовали в турнире по настольному теннису. Каждые два из них сыграли между собой ровно одну партию. Первый игрок одержал x_1 побед и потерпел y_1 поражений, второй игрок одержал x_2 побед и потерпел y_2 поражений и так далее. Докажите, что

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{10}^2.$$

- Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geq 3(a + b - 1).$$

Самая сложная задача для тех, кто все решит

Докажите, что существует бесконечно много простых p таких, что уравнение $x^2 + x + 1 = py$ разрешимо в целых числах x и y .

Простой вариант

- а) Придумайте такое четырехзначное число, что при замене любых трех его цифр любыми тремя другими не получится число, кратное 1992; б) сколько всего существует таких четырехзначных чисел?
- Дно прямоугольной коробки было выложено прямоугольными плитками размера 2×2 и 1×4 . Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли плитку размером 2×2 . Вместо нее нашли плитку размером 1×4 . Можно ли теперь выложить дно коробки?

Сложный вариант

- Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

Примечание. Давайте считать, что, если число содержит в своей десятичной записи цифру 0, то можно вычеркиванием остальных цифр получить из него число 0, делящееся на 11.

- Клетки таблицы 200×200 окрашены в черный и белый цвета так, что черных клеток на 404 больше, чем белых. Докажите, что найдется квадрат 2×2 , в котором число белых клеток нечетно.

Задачи, общие для простого и сложного вариантов

- Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. На продолжении стороны AB откладывается отрезок $BM = AB$, на продолжении стороны BC – отрезок $CN = BC$, на продолжении стороны CD – отрезок $DP = CD$, на продолжении стороны DA – отрезок $AQ = AD$. Доказать, что площадь четырехугольника $MNPQ$ в 5 раз больше площади четырехугольника $ABCD$.

- Десять спортсменов участвовали в турнире по настольному теннису. Каждые два из них сыграли между собой ровно одну партию. Первый игрок одержал x_1 побед и потерпел y_1 поражений, второй игрок одержал x_2 побед и потерпел y_2 поражений и так далее. Докажите, что

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{10}^2.$$

- Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geq 3(a + b - 1).$$

Самая сложная задача для тех, кто все решит

Докажите, что существует бесконечно много простых p таких, что уравнение $x^2 + x + 1 = py$ разрешимо в целых числах x и y .