

Простой вариант

1. Докажите, что если в дереве нет вершин степени 2, то листьев в дереве не меньше, чем остальных вершин. (*Напоминание.* Граф называется деревом, если он связан и не содержит ни одного цикла. Листом в дереве называется вершина степени 1.)
2. На полях бесконечной шахматной доски написаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому восьми соседних чисел – верхнего, нижнего, правого, левого и по диагоналям. а) докажите, что все числа на доске равны между собой; б) останется ли верным утверждение задачи, если числа в клетках таблицы целые?

Сложный вариант

1. В некоторой стране из каждого города выходит по крайней мере одна дорога. При этом нельзя, выйдя из некоторого города и пройдя по замкнутому маршруту, вернуться в исходный город. Город называется захолустным, если из него выходит ровно одна дорога. Города разбиты на две части так, что никакие два города из одной части не соединены дорогой. Пусть в первой части городов больше, чем во второй. Докажите, что в первой части есть захолустный город.
2. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано действительное число. Докажите, что найдется клетка, в которой написано число, не превосходящее чисел, написанных по крайней мере в четырех из восьми граничащих с ней клеток.

Задачи, общие для простого и сложного вариантов

3. Найти наибольшее целое число x , такое, что число $4^{27} + 4^{1000} + 4^x$ является точным квадратом.
4. В трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность, касающаяся боковых сторон AB и CD в точках K и L соответственно, а оснований AD и BC – в точках M и N соответственно.
 - а) Пусть Q – точка пересечения отрезков BM и AN . Докажите, что $KQ \parallel AD$.
 - б) Докажите, что $AK \cdot KB = CL \cdot LD$.
5. На каждой из карточек написано одно из двух чисел: $+1$ или -1 . Разрешается, указав на три карточки, спросить: «Чему равно произведение чисел на этих трех карточках?» (сами числа нам не сообщают). Какое наименьшее число таких вопросов надо задать, чтобы узнать произведение чисел, записанных на всех карточках, если число карточек равно а) 30; б) 31; в) 32? В каждом из случаев надо доказать, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.

Простой вариант

1. Докажите, что если в дереве нет вершин степени 2, то листьев в дереве не меньше, чем остальных вершин. (*Напоминание.* Граф называется деревом, если он связан и не содержит ни одного цикла. Листом в дереве называется вершина степени 1.)
2. На полях бесконечной шахматной доски написаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому восьми соседних чисел – верхнего, нижнего, правого, левого и по диагоналям. а) докажите, что все числа на доске равны между собой; б) останется ли верным утверждение задачи, если числа в клетках таблицы целые?

Сложный вариант

1. В некоторой стране из каждого города выходит по крайней мере одна дорога. При этом нельзя, выйдя из некоторого города и пройдя по замкнутому маршруту, вернуться в исходный город. Город называется захолустным, если из него выходит ровно одна дорога. Города разбиты на две части так, что никакие два города из одной части не соединены дорогой. Пусть в первой части городов больше, чем во второй. Докажите, что в первой части есть захолустный город.
2. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано действительное число. Докажите, что найдется клетка, в которой написано число, не превосходящее чисел, написанных по крайней мере в четырех из восьми граничащих с ней клеток.

Задачи, общие для простого и сложного вариантов

3. Найти наибольшее целое число x , такое, что число $4^{27} + 4^{1000} + 4^x$ является точным квадратом.
4. В трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность, касающаяся боковых сторон AB и CD в точках K и L соответственно, а оснований AD и BC – в точках M и N соответственно.
 - а) Пусть Q – точка пересечения отрезков BM и AN . Докажите, что $KQ \parallel AD$.
 - б) Докажите, что $AK \cdot KB = CL \cdot LD$.
5. На каждой из карточек написано одно из двух чисел: $+1$ или -1 . Разрешается, указав на три карточки, спросить: «Чему равно произведение чисел на этих трех карточках?» (сами числа нам не сообщают). Какое наименьшее число таких вопросов надо задать, чтобы узнать произведение чисел, записанных на всех карточках, если число карточек равно а) 30; б) 31; в) 32? В каждом из случаев надо доказать, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.