Простой вариант

1. Даны числа 32, 46, 52, 66. За один ход разрешается написать четыре новых числа, заменив каждое из исходных чисел средним арифметическим трех других. Докажите, что за несколько таких ходов нельзя получить набор а) 36, 45, 50, 56; б) 29, 44, 58, 65.
2. Существует ли натуральное число, у которого а) нечетное количество (не менее 2016) нечетных натуральных делителей и четное (не менее 2016) количество четных? б)* четное количество (не менее 2016) нечетных натуральных делителей и нечетное (не менее 2016) количество четных?

Сложный вариант

1. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.
2. Натуральное число N имеет ровно 12 делителей (включая 1 и N). Занумеруем их в порядке возрастания $d_1 < d_2 < \ldots < d_{12}$. Известно, что делитель с номером $d_4 - 1$ равен произведению $(d_1 + d_2 + d_4)d_8$. Найдите число N.

Задачи, общие для простого и сложного вариантов

3. В некоторой стране 100 аэродромов, причем все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается самолет и летит на ближайший к нему аэродром. Какое наибольшее число самолетов может при этом приземлиться на одном аэродроме?
4. Клетчатый квадрат 100 × 100 разрезан на доминошки 1 × 2. Двое играют в игру. Каждым ходом игрок склеивает две соседних по стороне клетки, между которыми был проведен разрез. Игрок проигрывает, если после его хода фигура получилась связной, т. е. весь квадрат можно поднять со стола, держа его за одну клетку. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его соперник?
5. Пусть a, b, c – положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство
$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

ЮНИ-центр-XXI **9 класс** **Сборы-4**

Простой вариант

1. Даны числа 32, 46, 52, 66. За один ход разрешается написать четыре новых числа, заменив каждое из исходных чисел средним арифметическим трех других. Докажите, что за несколько таких ходов нельзя получить набор а) 36, 45, 50, 56; б) 29, 44, 58, 65.
2. Существует ли натуральное число, у которого а) нечетное количество (не менее 2016) нечетных натуральных делителей и четное (не менее 2016) количество четных? б)* четное количество (не менее 2016) нечетных натуральных делителей и нечетное (не менее 2016) количество четных?

Сложный вариант

1. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.
2. Натуральное число N имеет ровно 12 делителей (включая 1 и N). Занумеруем их в порядке возрастания $d_1 < d_2 < \ldots < d_{12}$. Известно, что делитель с номером $d_4 - 1$ равен произведению $(d_1 + d_2 + d_4)d_8$. Найдите число N.

Задачи, общие для простого и сложного вариантов

3. В некоторой стране 100 аэродромов, причем все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается самолет и летит на ближайший к нему аэродром. Какое наибольшее число самолетов может при этом приземлиться на одном аэродроме?
4. Клетчатый квадрат 100 × 100 разрезан на доминошки 1 × 2. Двое играют в игру. Каждым ходом игрок склеивает две соседних по стороне клетки, между которыми был проведен разрез. Игрок проигрывает, если после его хода фигура получилась связной, т. е. весь квадрат можно поднять со стола, держа его за одну клетку. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его соперник?
5. Пусть a, b, c – положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство
$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$