

- Докажите, что среди любых десяти последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными числами.
- Решите в целых числах уравнение $x^3 - y^3 = xy + 61$ в натуральных числах.
- а) Докажите, что если p – простое число и $1 \leq k \leq p-1$, то $C_p^k : p$; б) докажите обратное утверждение: если $C_n^k : n$ при $1 \leq k \leq n-1$, то n – простое число.
- Докажите, что девятизначное число, в записи которого участвуют все цифры, кроме нуля, и которое оканчивается цифрой 5, не может быть квадратом целого числа.
- Существует ли натуральное число n , обладающее следующим свойством: сумма цифр числа n равна 1000, а сумма цифр числа n^2 равна 1000²?
- Докажите, что существует натуральное число, кратное 5^{1000} и не содержащее в своей записи ни одного нуля.
- а) Пусть p – простое число, большее 3. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, то $p \equiv 1 \pmod{6}$. б) Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $6n+1$.
- а) Пусть p – простое число, большее 5. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, то $p \equiv 1 \pmod{5}$. б) Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $5n+1$.
- Докажите, что для простого числа p вида $p = 4k+1$ числа $x = \pm(2k)!$ являются решениями сравнения $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, а других решений это сравнение не имеет.
- *** Докажите, что если p – простое число вида $4k+1$, то имеет место сравнение

$$1 + 2 + 3 + \dots + p-1 \equiv 1^2 + 2^2 + \dots + (p-1)^2 \pmod{p}.$$

Подсказка. Для решения задачи №3 попробуйте проделать следующее. Докажите, что если p – простое вида $4k+1$, то два остатка r и $p-r$ являются одновременно квадратичными вычетами или квадратичными невычетами по модулю p . Для этого покажите, что число -1 всегда является квадратичным вычетом по модулю простого числа вида $4k+1$.

- Докажите, что если $p \equiv 1 \pmod{n}$, то сравнение $x^n \equiv 1 \pmod{p}$ имеет ровно n решений.

- Докажите, что среди любых десяти последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными числами.
- Решите в целых числах уравнение $x^3 - y^3 = xy + 61$ в натуральных числах.
- а) Докажите, что если p – простое число и $1 \leq k \leq p-1$, то $C_p^k : p$; б) докажите обратное утверждение: если $C_n^k : n$ при $1 \leq k \leq n-1$, то n – простое число.
- Докажите, что девятизначное число, в записи которого участвуют все цифры, кроме нуля, и которое оканчивается цифрой 5, не может быть квадратом целого числа.
- Существует ли натуральное число n , обладающее следующим свойством: сумма цифр числа n равна 1000, а сумма цифр числа n^2 равна 1000²?
- Докажите, что существует натуральное число, кратное 5^{1000} и не содержащее в своей записи ни одного нуля.
- а) Пусть p – простое число, большее 3. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, то $p \equiv 1 \pmod{6}$. б) Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $6n+1$.
- а) Пусть p – простое число, большее 5. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, то $p \equiv 1 \pmod{5}$. б) Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $5n+1$.
- Докажите, что для простого числа p вида $p = 4k+1$ числа $x = \pm(2k)!$ являются решениями сравнения $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, а других решений это сравнение не имеет.
- *** Докажите, что если p – простое число вида $4k+1$, то имеет место сравнение

$$1 + 2 + 3 + \dots + p-1 \equiv 1^2 + 2^2 + \dots + (p-1)^2 \pmod{p}.$$

Подсказка. Для решения задачи №3 попробуйте проделать следующее. Докажите, что если p – простое вида $4k+1$, то два остатка r и $p-r$ являются одновременно квадратичными вычетами или квадратичными невычетами по модулю p . Для этого покажите, что число -1 всегда является квадратичным вычетом по модулю простого числа вида $4k+1$.

- Докажите, что если $p \equiv 1 \pmod{n}$, то сравнение $x^n \equiv 1 \pmod{p}$ имеет ровно n решений.