

Заканчиваем принцип Дирихле

1. В бригаде 7 человек, и их суммарный возраст – 332 года. Доказать, что из них можно выбрать 3 человека, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.
2. В целых точках прямой расположены ямы, шириной 0,0001 каждая. Длина прыжка блохи постоянна и равна $\sqrt{2}$ (блоха прыгает в одну и ту же сторону). Докажите, что блоха рано или поздно попадет в яму.
3. * Имеется n целых чисел. Доказать, что среди них всегда найдутся несколько (или, быть может, одно) сумма которых делится на n , если а) $n=3$; б) $n=100$; в) n – любое.
4. * Можно ли найти такую натуральную степень числа 3, которая оканчивается на ...0001?

Четность

5. а) 30 пятаков лежат гербом вверх. Разрешается за один раз перевернуть любые 29 из них. Можно ли за несколько раз перевернуть все пятаки гербом вниз? б) Тот же вопрос для случая 15 пятаков, если разрешается перевернуть любые 14 из них.
6. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2017. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них модуль их разности. После 2016 таких операций на доске останется одно число. Может и этим числом оказаться число 0?
7. Можно ли разбить числа от 1 до 33 на 11 групп по 3 числа в каждой так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме двух других?
8. Кузнечик прыгает по прямой, причём в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз – на 2 см и так далее. Может ли он после а) 2016 прыжков; б) 2017 прыжков оказаться в исходной точке? в) * при каких натуральных n он может после n прыжков оказаться в исходной точке?
9. Кузнечик прыгает по прямой, причём в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз – на 3 см, в третий раз – на 5 см и так далее. Может ли он после а) 57; б) 2016 прыжков оказаться в исходной точке? в) * при каких натуральных n он может оказаться в исходной точке после n -того прыжка?
10. (*) В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: А, В и С. Две амёбы разных типов могут слиться в одну амёбу третьего. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Каков её тип, если изначально амёб типа А было 20 штук, типа В – 21 штука и типа С – 22 штуки?
11. (*) На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка АВ. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки А не равна сумме расстояний от этих точек до точки В.
12. ** Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари из двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что число рыцарей делится на 4.

Остаток

13. Хулиган Вася рвёт школьную стенгазету. За один раз он рвёт любой из уже получившихся кусков на 6 частей. Может ли получиться 2013 кусков? б) То же, если два хулигана рвут две стенгазеты один на 4 части за раз, а другой на 7 частей.
14. Иван-Царевич имеет два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу 21 голову, а второй 4 головы, но тогда у Змея Горыныча отрастает 2013 голов. (Если у Змея Горыныча осталось, например, 3 головы, то рубить их нельзя). Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если вначале у него было 100 голов?
15. На доске написано число 8^n . У него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр, и т.д. до тех пор, пока не получится однозначное число. Что это за число, если $n=2014$?
16. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2014. За ход разрешается стереть любые два числа и вместо них написать остаток от деления на 7 их суммы. После 2012 таких операций на доске осталось два числа, одно из которых равно 1014. Найдите второе число.
17. Первый член последовательности равен 1, а каждый следующий, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену суммы его цифр. Может ли в этой последовательности встретиться число 765432?
18. * В стране Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Могут ли через некоторое время все хамелеоны стать одного цвета?
19. (**) В четырех коробках лежат карандаши. За один ход разрешается взять из любых трех коробок по карандашу и переложить их в оставшуюся коробку (если хотя бы две коробки пусты, то этот ход невозможен). Обратное, три карандаша из любой коробки можно переложить в другие три коробки, по одному карандашу в каждую. В начале в первой, второй, третьей, четвертой коробках соответственно было 4, 5, 6 и 7 карандашей. Через некоторое время в первой коробке лежало 9 карандашей, а в четвертой – 8. Сколько карандашей в этот момент лежало во второй коробке и сколько – в третьей?
20. * Есть три автомата: первый по карточке с числами a и b выдаёт карточку с числами $(a-b, b)$; второй – карточку $(a+b, b)$; третий – карточку (b, a) . Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих операций из карточки (19, 86) получить карточку а) (31, 13); б) (12, 21)?
21. ** Есть три печатающих автомата: первый по карточке (a, b) выдаёт карточку с числами $(a+1, b+1)$; второй – карточку $(a/2, b/2)$ (он работает только тогда, когда a и b чётные); третий – по двум карточкам с числами (a, b) и (b, c) печатает карточку с числами (a, c) . Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих операций из карточки (5, 19) получить карточку а) (1, 50); б) (1, 100)?