Четность

1. а) 30 пятаков лежат гербом вверх. Разрешается за один раз перевернуть любые 29 из них. Можно ли за несколько раз перевернуть все пятаки гербом вниз? б) Тот же вопрос для случая 15 пятаков, если разрешается перевернуть любые 14 из них.
2. На доске написаны числа 1, 2, …, 2014. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них модуль их разности. После 2012 таких операций на доске останется одно число. Может и этим числом оказаться число 0?
3. В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: А, В и С. Две амёбы разных типов могут слиться в одну амёбу третьего. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Каков её тип, если изначально амёб типа А было 20 штук, типа В – 21 штука и типа С – 22 штуки?
4. Каждое из чисел x_1, x_2, …, x_n, равно либо 1, либо -1, причём $x_1x_2+ x_2x_3+ \ldots + x_nx_1=0$. Докажите, что n кратно 4.
5. Три кузнечика играют на прямой в чехарду. Каждый раз один из них прыгает через другого (но не через обоих сразу). Могут ли они после 2015-го прыжка оказаться на прежних местах?
6. На хоккейном поле лежат три шайбы: A, B и C. Хоккеист бьет по одной из них так, чтобы она прошла между двумя другими шайбами. Могут ли после 25 таких ударов все шайбы оказаться на исходных местах?
7. * а) Любые два тома, стоящие на полке рядом друг с другом, можно поменять местами. Докажите, что четность числа операций, необходимых для их упорядочивания, зависит от начальной расстановки, но не зависит от способа упорядочивания; б) тот же вопрос, если можно менять местами любые два тома, не обязательно стоящие рядом.
8. * На прямой стоят две фишки: слева красная, справа синяя. Разрешается вставить две фишки одного цвета подряд (между фишками или с краю), а также удалить две соседние одноцветные фишки. Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?
9. Докажите, что в исходной позиции игры «15» нельзя поменять местами фишки «14» и «15» так, чтобы все остальные фишки остались на своих местах.

О словах и диэдральной группе (РТЮМ-2014)

Алфавит племени Тумба-Юмба состоит из двух букв: a и b. Два слова называются одинаковыми, если из одного слова можно получить второе слово, используя правила:

а) в любое место слова можно вставить последовательность $aaaa$ или последовательность bb. Аналогично из любого слова можно удалить последовательности $aaaa$ и bb;

б) Последовательность bab можно заменить на последовательность aaa и наоборот.

В языке присутствует пустое слово, которое мы будем обозначать Ø. В данном случае по определению оно равно $aaaa$, а также bb. Первое правило кратко будем записывать как $a^4 = b^2 = \varnothing$, а второе – как $bab = a^3$. Если x - некоторое слово, то через x^0 всегда обозначается пустое слово.

1. Докажите, что слова $abaab$ и aaa равны.
2. Докажите, что слова $abbabbbaaabb$ и $abababbaabb$ различны.
3. Попробуйте найти (описать) множество всех слов, равных а) Ø; б) a; в) b.
4. Сколько существует различных слов, состоящих не более чем из трех букв? Сколько существует различных слов, состоящих не более чем из четырех букв? Сколько вообще существует различных слов?

Исследуйте аналогичные вопросы в случае, если действуют следующие правила:

5. $a^n = b^2 = \varnothing, bab = a^{n-1}$ (рассмотрите этот вопрос хотя бы для некоторых натуральных n).
6. $a^3 = b^2 = \varnothing, ab = baa$. 7. $a^5 = b^3 = \varnothing, abab = \varnothing$ .8. $a^2 = a, b^2 = b, abab = ab.$
7. Предложите свои обобщения или направления в этой задаче и исследуйте их.