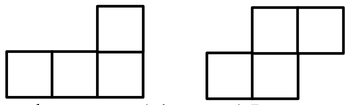
1. В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: A, B и C. Две амёбы разных типов могут слиться в одну амёбу третьего. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Каков её тип, если изначально амёб типа A было 20 штук, типа B – 21 штука и типа C – 22 штуки?
2. Каждое из чисел x_1, x_2, …, x_n, равно либо 1, либо -1, причём $x_1x_2+ x_2x_3+ \ldots + x_nx_1=0$. Докажите, что n кратно 4.
3. * Есть три автомата: первый по карточке с числами a и b выдаёт карточку с числами (a-b, b); второй – карточку (a+b, b); третий – карточку (b, a). Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих операций из карточки (19, 86) получить карточку а) (31, 13); б) (12, 21)? в) Допустим, что изначально имеется карточка с числами (a, b). Найдите все карточки (c, d), которые можно получить с помощью имеющихся автоматов.
4. ** Есть три печатающих автомата: первый по карточке (a, b) выдаёт карточку с числами (a+1, b+1); второй – карточку (a/2, b/2) (он работает только тогда, когда a и b чётные); третий – по двум карточкам с числами (a, b) и (b, c) печатает карточку с числами (a, c). Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих операций из карточки (5, 19) получить карточку а) (1, 50); б) (1, 100)? в)*** Пусть первоначально имеется карточка с числами (a, b), $a<b$, а мы хотим получить карточку с числами (1, n). При каких n это можно сделать?

Раскраски

5. Дно прямоугольной коробки было выложено прямоугольными плитками размера 2 × 2 и 1 × 4. Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли плитку размером 2 × 2. Вместо нее нашли плитку размером 1 × 4. Можно ли теперь выложить дно коробки?
6. В каждую клетку таблицы 8 × 8 вписано целое число. За один ход разрешается выбрать любой квадрат 4 × 4 или 3 × 3 и прибавить 1 к каждому числу в этом квадрате. Всегда ли вы можете получить таблицу, все числа в которой кратны а) 2; б) 3?
7. Некто хочет замостить клетчатую доску 7 × 8 плитками двух типов:



Какое наименьшее число L-образных плиток может участвовать в замощении?

8. (**) Докажите, что в исходной позиции игры «15» нельзя поменять местами фишки «14» и «15» так, чтобы все остальные фишки остались на своих местах.
9. (**) На поле для игры расставлены 32 фишки (см. рисунок 1). Ход заключается в том, что одна из фишек забирает другую, расположенную в соседней по стороне клетке, перепрыгивая через нее, если за ней имеется свободная клетка. Допустим, что в конце игры осталась одна фишка. Докажите, что она обязательно расположена в одной из пяти клеток, отмеченных на рисунке 2.

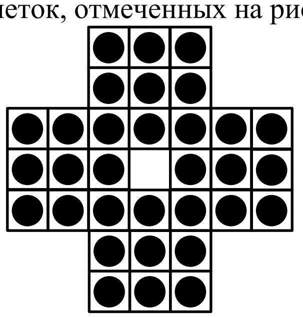


Рисунок 1

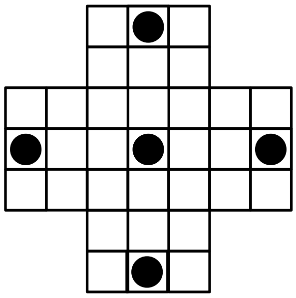


Рисунок 2

О словах и диэдральной группе (РТЮМ-2014)

Алфавит племени Тумба-Юмба состоит из двух букв: a и b. Два слова называются одинаковыми, если из одного слова можно получить второе слово, используя правила:

а) в любое место слова можно вставить последовательность $aaaa$ или последовательность bb. Аналогично из любого слова можно удалить последовательности $aaaa$ и bb;

б) Последовательность bab можно заменить на последовательность aaa и наоборот.

В языке присутствует пустое слово, которое мы будем обозначать Ø. В данном случае по определению оно равно $aaaa$, а также bb. Первое правило кратко будем записывать как $a^4 = b^2 = \varnothing$, а второе – как $bab = a^3$. Если x - некоторое слово, то через x^0 всегда обозначается пустое слово.

1. Докажите, что слова $abaab$ и aaa равны.
2. Докажите, что слова $abbabbbaaabb$ и $abababbaabb$ различны.
3. Попробуйте найти (описать) множество всех слов, равных а) Ø; б) a; в) b.
4. Сколько существует различных слов, состоящих не более чем из трех букв? Сколько существует различных слов, состоящих не более чем из четырех букв? Сколько вообще существует различных слов?

Исследуйте аналогичные вопросы в случае, если действуют следующие правила:

5. $a^n = b^2 = \varnothing, bab = a^{n-1}$ (рассмотрите этот вопрос хотя бы для некоторых натуральных n).
6. $a^3 = b^2 = \varnothing, ab = baa$. 7. $a^5 = b^3 = \varnothing, abab = \varnothing$ .8. $a^2 = a, b^2 = b, abab = ab.$
7. Предложите свои обобщения или направления в этой задаче и исследуйте их.