1. а) В таблице 8×8 одна из клеток закрашена чёрным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми; б) а если таблица имеет размер 3×3, и черным цветом закрашена одна угловая клетка? в) а если чёрным цветом закрашены четыре угловые клетки?
2. Шахматная фигура «верблюд» ходит следующим образом: вначале сдвигается на соседнее поле, затем на n полей в перпендикулярном направлении (при n=2 это конь). При каких n верблюд может с любой клетки бесконечной шахматной доски пройти на любую другую?
3. В вершинах правильного 12-угольника расставлены числа +1 и -1 таким образом, что во всех вершинах, кроме одной, стоит +1. Разрешается менять знак в любых а) 3-х; б) 4-х; в) 6-и подряд идущих вершинах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы число -1 сместилось в вершину, соседнюю с исходной?
4. * Есть три автомата: первый по карточке с числами a и b выдаёт карточку с числами (a-b, b); второй – карточку (a+b, b); третий – карточку (b, a). Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих операций из карточки (19, 86) получить карточку а) (31, 13); б) (12, 21)? в) Допустим, что изначально имеется карточка с числами (a, b). Найдите все карточки (c, d), которые можно получить с помощью имеющихся автоматов.
5. ** Есть три печатающих автомата: первый по карточке (a, b) выдаёт карточку с числами (a+1, b+1); второй – карточку (a/2, b/2) (он работает только тогда, когда a и b чётные); третий – по двум карточкам с числами (a, b) и (b, c) печатает карточку с числами (a, c). Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих операций из карточки (5, 19) получить карточку а) (1, 50); б) (1, 100)? в)*** Пусть первоначально имеется карточка с числами (a, b), $a<b$, а мы хотим получить карточку с числами (1, n). При каких n это можно сделать?

Еще немного об инверсиях

6. * а) Любые два тома, стоящие на полке рядом друг с другом, можно поменять местами. Докажите, что четность числа операций, необходимых для их упорядочивания, зависит от начальной расстановки, но не зависит от способа упорядочивания; б) тот же вопрос, если можно менять местами любые два тома, не обязательно стоящие рядом.
7. На хоккейном поле лежат три шайбы: A, B и C. Хоккеист бьет по одной из них так, чтобы она прошла между двумя другими шайбами. Могут ли после 25 таких ударов все шайбы оказаться на исходных местах?
8. Докажите, что в исходной позиции игры «15» нельзя поменять местами фишки «14» и «15» так, чтобы все остальные фишки остались на своих местах.

Полуинвариант

9. На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается стереть с доски два различных числа и написать вместо этого их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что наступит момент, когда нельзя будет сделать больше ни одного хода.
10. На банкет приглашено 2n гостей. У каждого из них ровно n -1 враг. Докажите, что можно рассадить гостей за столом так, чтобы ни один не сидел рядом со своим врагом.
11. Вокруг поляны стоят 12 домиков, покрашенные в белый и красный цвет, в которых поселилось 12 гномов. У каждого гнома нечетное число друзей. В январе первый гном красит свой дом в тот цвет, в который окрашены дома большинства его друзей. В феврале это же делает второй (по часовой стрелке) гном и так далее. Докажите, что наступит момент, после которого цвет дома у каждого гнома перестанет меняться.
12. В парламенте у каждого ее члена не более трех врагов (считается, что если В – враг А, то А – враг В). Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, чтобы у каждого парламентария в одной с ним палате было не более одного врага.
13. В клетках таблицы $m \times n$ вписаны числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце были неотрицательными.
14. * На плоскости дано N точек, некоторые из них соединены отрезками. Если два отрезка пересекаются, то их можно заменить двумя другими с концами в тех же точках. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?
15. ** Число 123456789101112…1000 умножили на целое число от 1 до 9 и вычеркнули из произведения все единицы. Затем опять умножили на цифру от 1 до 9 и вычеркнули все единицы и т. д. Какое наименьшее число можно получить таким образом?