Правила суммы и произведения

1. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску а) белую и черную ладьи; б) две белые ладьи так, чтобы они не били друг друга?
2. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску восемь а) одноцветных ладей; б) разноцветных ладей так, чтобы они не били друг друга?
3. Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две одинаковые цифры?
4. * Имеется множество C, состоящее из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в C два подмножества A и B так, чтобы а) множества A и B не пересекались; б) множество A содержалось бы в множестве B?
5. ** На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За один ход можно передвинуть любую из них на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку. Две фишки не могут стоять на одной клетке. Могут ли в результате таких ходов встретится все возможные варианты расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу?

Перестановки, сочетания, размещения

6. а) Сколько 7-значных чисел можно получить всевозможными перестановками цифр 1, 2, …, 7? б) Найдите сумму всех этих чисел.
7. Из двух математиков и десяти экономистов нужно составить комиссию из восьми человек, причем в комиссии должен присутствовать хотя бы один математик. Сколькими способами это можно сделать?
8. Сколькими способами можно разделить на команды по 6 человек для игры в волейбол группу, состоящую из а) 12; б) 24 спортсменов?
9. Сколько существует 6-значных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?
10. Докажите тождества: а) $C_n^k = C_n^{n-k}$; б) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$; в)* $C_n^0 + C_n^1 + ... C_n^n = 2^n$; г) $C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}$; д) $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + ... + C_n^k C_m^0$; е) $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ...(C_n^n)^2$; ж) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{k-1}^{k-1}$.
11. * Улитка должна проползти вдоль линий клетчатой бумаги путь длины $2n$, начав и кончив свой путь в данном узле. Докажите, что число различных ее маршрутов равно $(C_{2n}^n)^2$.
12. ** Найдите все такие n, что биномиальные коэффициенты C_n^k являются нечетными числами при всех $k = 0,1,2,..., n$.
13. План города N имеет форму таблицы размером $m \times n$. На всех улицах введено одностороннее движение: можно ехать только вправо или вверх. Сколько существует различных маршрутов, ведущих из левого нижнего угла в правый верхний? Решите задачу для а) $m = 3$, $n = 4$; б) при произвольных m и n.
14. *** В городе N из предыдущей задачи живут Вася и Петя. Они поссорились и не хотят встречаться. Вася хочет проехать из пункта A в пункт B, а Петя – из пункта C в пункт D (см. рис. 5). При этом каждый из них хочет ехать только по направлениям вправо и вверх, чтобы маршрут получился как можно короче. Сколькими способами они могут добраться до мест назначения так, чтобы их маршруты не пересекались?

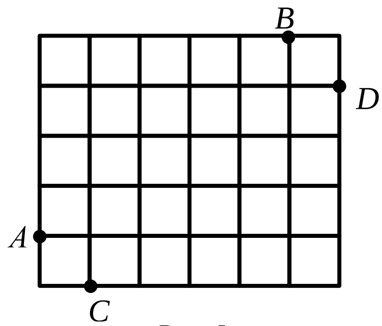

Рис. 5.

Немного о числах Каталана

15. Пусть $\{a_1, a_2, …, a_n\}$ – а)** последовательность, состоящая из чисел +1 и -1; б)*** произвольная последовательность целых чисел, сумма которых в обоих случаях равна 1. Частичной суммой такой последовательности называется сумма $S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$ с любым натуральным k = 1, 2, …, n. Докажите, что ровно у одного из циклических сдвигов

$$\{a_1, a_2, …, a_n\}, \{a_2, a_3, …, a_n, a_1\}, \quad …, \quad \{a_n, a_1, a_2, …, a_{n-1}\}$$

любой такой последовательности все частичные суммы положительны.

16. Докажите формулу $C_n = C_{2n}^n \dfrac{1}{n+1}$, где C_n – n-тое число Каталана.
17. Докажите, что числа Каталана удовлетворяют соотношению $C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + C_2 C_{n-3} + ... + C_{n-1} C_0$.
18. Сколько существует способов разрезать выпуклый (n+2)-угольник диагоналями на треугольники?
19. **Очередь в кассу.** а) Билеты стоят по 50 копеек, $2n$ покупателей стоят в очереди в кассу. Половина из них имеет по рублю, а остальные – по 50 копеек. Кассир начинает продажу билетов, не имея денег. Сколько существует различных порядков в очереди, таких, что кассир сможет дать сдачу всем покупателям? б) Тот же вопрос, если в кассе изначально имеется p монет по 50 копеек, а в очереди стоит k + m человек, причем k из них имеют рубли, а m – 50-копеечные монеты?
20. Сколькими способами можно построить $2n$ человек разного роста в две шеренги по n человек в каждой, чтобы в каждой шеренге они стояли по росту, причем каждый человек в первой шеренге был ниже стоящего за ним человека во второй шеренге?
21. Монету бросают $2n$ раз. Докажите, что число вариантов, при которых герб ни в один момент не выпал чаще решки, равно

$$1+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+...++(C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$