

Сочетания с повторениями. Метод шаров и перегородок

1. Сколькими способами 12 пятак можно разложить по 5 различным кошелькам так, чтобы ни один кошелёк не оказался пустым? А если кошельки могут оставаться пустыми?
2. Сколькими способами можно переплести 12 одинаковых книг в красный, зелёный и синий переплёты?
3. Сколькими способами можно разложить в 9 лузах 7 белых и 2 чёрных шара? Часть луз может быть пустой, а лузы считаются различными.
4. Сколькими способами натуральное число N можно представить в виде суммы а) K натуральных слагаемых; б) K неотрицательных целых слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?
5. * а) За круглым столом сидит 12 рыцарей. Каждый из них враждует с двумя своими соседями. Надо выбрать 5 рыцарей, чтобы отправить их в поход. Сколькими способами можно это сделать так, чтобы среди выбранных рыцарей не было врагов? б) Решите задачу в случае, когда за круглым столом сидит n рыцарей, а в поход нужно отправить k рыцарей.
6. На доске выписаны все сочетания с повторениями из n букв по n . Сколько всего выписано сочетаний? Сколько раз выписана каждая буква?
7. Сколькими способами можно построить $2n$ человек разного роста в две шеренги по n человек, чтобы в каждой шеренге они стояли по росту, причем каждый человек в первой шеренге был ниже стоящего за ним человека во второй шеренге?

Разное

8. На 44 деревьях, посаженных по окружности, сидели 44 веселых чижа, по одному на каждом дереве. Время от времени какие-то два чижа перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один – по часовой стрелке, другой – против). Смогут ли чижи когда-нибудь собраться на одном дереве?
9. В стране Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Могут ли через некоторое время все хамелеоны стать одного цвета?
10. В четырех коробках лежат карандаши. За один ход разрешается взять из любых трех коробок по карандашу и переложить их в оставшуюся коробку (если хотя бы две коробки пусты, то этот ход невозможен). Обратное, три карандаша из любой коробки можно переложить в другие три коробки, по одному карандашу в каждую. В начале в первой, второй, третьей, четвертой коробках соответственно было 4, 5, 6 и 7 карандашей. Через некоторое время в первой коробке лежало 9 карандашей, а в четвертой – 8. Сколько карандашей в этот момент лежало во второй коробке и сколько – в третьей?
11. Пусть имеется множество из 25 точек, причем среди любых трех из этих точек найдутся две на расстоянии не более 1 друг от друга. Докажите, что существует круг радиуса 1, которым можно накрыть по меньшей мере 13 точек.
12. Докажите, что найдется число Фибоначчи, которое оканчивается на n нулей.
13. У шахматиста есть 77 дней на подготовку к шахматному турниру. Он хочет играть хотя бы одну партию каждый день, но всего сыграть не более 132 партий. Докажите, что найдутся несколько последовательных дней, в течение которых шахматист сыграет ровно 21 партию.

Сочетания с повторениями. Метод шаров и перегородок

1. Сколькими способами 12 пятак можно разложить по 5 различным кошелькам так, чтобы ни один кошелёк не оказался пустым? А если кошельки могут оставаться пустыми?
2. Сколькими способами можно переплести 12 одинаковых книг в красный, зелёный и синий переплёты?
3. Сколькими способами можно разложить в 9 лузах 7 белых и 2 чёрных шара? Часть луз может быть пустой, а лузы считаются различными.
4. Сколькими способами натуральное число N можно представить в виде суммы а) K натуральных слагаемых; б) K неотрицательных целых слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?
5. * а) За круглым столом сидит 12 рыцарей. Каждый из них враждует с двумя своими соседями. Надо выбрать 5 рыцарей, чтобы отправить их в поход. Сколькими способами можно это сделать так, чтобы среди выбранных рыцарей не было врагов? б) Решите задачу в случае, когда за круглым столом сидит n рыцарей, а в поход нужно отправить k рыцарей.
6. На доске выписаны все сочетания с повторениями из n букв по n . Сколько всего выписано сочетаний? Сколько раз выписана каждая буква?
7. Сколькими способами можно построить $2n$ человек разного роста в две шеренги по n человек, чтобы в каждой шеренге они стояли по росту, причем каждый человек в первой шеренге был ниже стоящего за ним человека во второй шеренге?

Разное

8. На 44 деревьях, посаженных по окружности, сидели 44 веселых чижа, по одному на каждом дереве. Время от времени какие-то два чижа перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один – по часовой стрелке, другой – против). Смогут ли чижи когда-нибудь собраться на одном дереве?
9. В стране Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Могут ли через некоторое время все хамелеоны стать одного цвета?
10. В четырех коробках лежат карандаши. За один ход разрешается взять из любых трех коробок по карандашу и переложить их в оставшуюся коробку (если хотя бы две коробки пусты, то этот ход невозможен). Обратное, три карандаша из любой коробки можно переложить в другие три коробки, по одному карандашу в каждую. В начале в первой, второй, третьей, четвертой коробках соответственно было 4, 5, 6 и 7 карандашей. Через некоторое время в первой коробке лежало 9 карандашей, а в четвертой – 8. Сколько карандашей в этот момент лежало во второй коробке и сколько – в третьей?
11. Пусть имеется множество из 25 точек, причем среди любых трех из этих точек найдутся две на расстоянии не более 1 друг от друга. Докажите, что существует круг радиуса 1, которым можно накрыть по меньшей мере 13 точек.
12. Докажите, что найдется число Фибоначчи, которое оканчивается на n нулей.
13. У шахматиста есть 77 дней на подготовку к шахматному турниру. Он хочет играть хотя бы одну партию каждый день, но всего сыграть не более 132 партий. Докажите, что найдутся несколько последовательных дней, в течение которых шахматист сыграет ровно 21 партию.