Простые задачи на принцип Дирихле

1. Какое наибольшее число шахматных а) королей; б) слонов; в) коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?
2. а) Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы в каждом уголке из трёх полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

б) Какое наименьшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы в каждом уголке из трёх полей было по крайней мере одно чёрное поле?

3. Дано 11 различных натуральных чисел, не больших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.
4. Дан набор из n+1 различного натурального числа, меньшего 2n. Доказать, что из него можно выбрать три таких числа, что одно из них равно сумме двух других.
5. Докажите, что среди 11 десятичных дробей найдутся две, совпадающие в бесконечном числе разрядов.
6. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.
7. Докажите, что в круге радиуса 1 нельзя выбрать более 5 точек, попарные расстояния между которыми больше 1.
8. По кругу выписаны числа 1, 2, 3, ..., 10 в некотором порядке. Петя вычислил 10 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшее из вычисленных чисел. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?

Принцип Дирихле и целые числа

9. Доказать, что найдётся число вида 1111…11100000…0000, делящееся на 2016.
10. Доказать, что найдётся число, записываемое одними единицами, делящееся на 2017.
11. (*) Имеется n целых чисел. Доказать, что среди них всегда найдутся несколько (или, быть может, одно) сумма которых делится на n, если а) n=3; б) n=100; в) n – любое.
12. (*) Доказать, что найдётся натуральное число, заканчивающееся на цифры 2010 и кратное 2011.
13. (*) Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел найдётся такое, сумма цифр которого делится на 11.
14. Имеется 101 натуральное число, причем сумма этих чисел равна 200. Докажите, что из этих чисел всегда можно выбрать несколько чисел, дающих в сумме 100.
15. Трехчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x принимает значение, которое является точной четвертой степенью. Докажите, что a = b = 0.

Раскраска плоскости

16. Найдите хроматическое число прямой.
17. Докажите, что хроматическое число плоскости не менее а) трех; б) четырех.
18. Докажите, что хроматическое число плоскости не превосходит а)* девяти; б)*** семи.
19. Плоскость окрашена в два цвета, причем имеются точки обоих цветов. Докажите, что найдутся две точки на расстоянии 1 и окрашенные в разные цвета.
20. Плоскость окрашена в два цвета. Докажите, что найдется а) равнобедренный; б) равносторонний треугольник, вершины которого окрашены в один цвет.
21. Каждая из 9 прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2:3. Докажите, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.
22. Дан 101 прямоугольник с целыми сторонами, не превышающими 100. Докажите, что среди них найдутся три прямоугольника A, B и C, которые можно поместить друг в друга, так что $A \subset B \subset C$.
23. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в два цвета. Докажите, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечении которых лежат точки одного цвета.

Теорема Дирихле.

24. В целых точках прямой расположены ямы шириной 0,0001 каждая. На прямой сидит блоха, которая каждую секунду совершает прыжок в одном и том же направлении длины $\sqrt{2}$. Докажите, что блоха рано или поздно упадет в яму.
25. **Теорема Дирихле.** Докажите, что для любого натурального n и вещественного α существуют натуральные числа p и q такие, что $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \leq \frac{1}{qn}$.
26. Докажите, что число $\alpha = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^9} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^{n^2}} + \cdots$ является иррациональным.