Разные задачи на принцип Дирихле

1. При каком наименьшем количестве учеников школы среди них найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?
2. В непрозрачном мешке лежат 4 красных и 2 зелёных шара. Какое наименьшее число шаров надо вытащить, чтобы среди них оказался: а) 1 красный шар; б) 1 зелёный шар; в) 1 красный и 1 зелёный шар; г) 2 шара одного цвета. д) В ящике лежит 100 разноцветных шариков: 28 красных, 20 зелёных, 12 жёлтых, 20 синих, 10 белых и 10 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них обязательно оказались 15 шариков одного цвета?
3. Какому минимальному числу школьников можно раздать 200 конфет так, чтобы среди них при любом распределении конфет нашлись двое, которым конфет достанется поровну (возможно, ни одной)?
4. Можно ли заполнить квадрат 6 × 6 числами +1, -1, 0, так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны?
5. Какое наибольшее число а) ладей; б) ферзей; в) королей; г) слонов; г*) коней; можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?
6. В квадрате 5 × 5 закрашено 16 клеток. Доказать, что найдётся закрашенный трёхклеточный уголок.
7. На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили три контрольные работы, за каждую контрольную ставилась одна из оценок 2, 3, 4, 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки за все контрольные?
8. * В бригаде 7 человек, и их суммарный возраст – 332 года. Доказать, что из них можно выбрать 3 человека, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.
9. * В клетках таблицы 10 × 10 расставлены цифры 0 и 1, причём известно, что из любых четырёх строчек таблицы какие-то две совпадают. Докажите, что в таблице есть два одинаковых столбца.
10. *** В целых точках прямой расположены ямы, шириной 0,0001 каждая. Длина прыжка блохи постоянна и равна $\sqrt{2}$ (блоха прыгает в одну и ту же сторону). Докажите, что блоха рано или поздно попадет в яму.

Принцип Дирихле и делимость целых чисел

11. а) Верно ли, что среди любых семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на три? б) Какое наименьшее количество натуральных чисел надо взять, чтобы среди них обязательно нашлись три числа, сумма которых делится на три?
12. Можно ли найти такие две различные степени числа 4, у которых а) последняя цифра одинакова, б) две последние цифры одинаковы, в) три последние цифры одинаковы?
13. Доказать, что найдётся число вида 1111…11100000…0000, делящееся на 2018.
14. Доказать, что найдётся число, записываемое одними единицами, делящееся на 2019.
15. * Имеется n целых чисел. Доказать, что среди них всегда найдутся несколько (или, быть может, одно) сумма которых делится на n, если а) n=3; б) n=100; в) n – любое.
16. * Даны 8 натуральных чисел $1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_8 \le 15$. Докажите, что среди всевозможных попарных разностей этих чисел есть по крайней мере три одинаковых числа.
17. * Доказать, что найдётся натуральное число, заканчивающееся на цифры 2018 и кратное 2019.
18. * Можно ли найти такую натуральную степень числа 3, которая оканчивается на …0001?
19. * Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел найдётся такое, сумма цифр которого делится на 11. Верно ли аналогичное утверждение для 38 чисел?

Принцип Дирихле в геометрии

20. В квадрате 4 × 4 нарисовано 15 точек. Доказать, что из него можно вырезать квадратик 1 × 1, не содержащий внутри себя точек.
21. Внутри равностороннего треугольника со стороной 3 расположено 10 точек. Докажите, что найдутся две точки на расстоянии не более 1 друг от друга.
22. В квадрате со стороной 5 см размещено 126 точек. Доказать, что среди них существует 6 точек, которые лежат в круге радиуса 1 см.
23. * В прямоугольнике размера 3 × 4 выбраны 6 точек. Докажите, что среди них найдутся две, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$.
24. Плоскость окрашена в два цвета – белый и чёрный, причём имеются точки обоих цветов. Докажите, что всегда найдутся две точки а) разного; б) одного цвета на расстоянии 1 см друг от друга.
25. * Плоскость окрашена в три цвета. Докажите, что всегда найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 см друг от друга.
26. Плоскость окрашена в два цвета. Докажите, что найдется а) равнобедренный; б) равносторонний треугольник, вершины которого окрашены в один цвет.