

## Новые знакомые Незнайки

Вышел однажды Знайка из дома. По городу решил погулять, воздухом подышать, в библиотеку зайти, новые книги и журналы посмотреть. Не успел он за порог ступить, как навстречу Незнайка с рюкзаком. Идет Незнайка довольный, улыбается, песенку веселую насвистывает.

— Ты куда? — спросил Знайка.

— Не куда, а откуда, — охотно ответил Незнайка. — Из похода вернулся. Нас Пулька в поход водил.

— А меня почему не позвали? — обиделся Знайка. — А еще друзья называются!

Незнайке стало стыдно. Ведь, когда Знайка полетел на воздушном шаре, он взял всех, кто хотел лететь. И в походе был бы не лишним, столько интересного рассказал бы.

— Честно говоря, я сам в последний момент узнал. Пулька объявление повесил, а я мимо шел. Но ты не расстраивайся. Через неделю мы снова пойдем. Можешь отправиться с нами.

— А что в походе было интересного? — спросил Знайка. — Может быть, я с вами и не пойду.

Незнайку переполняли впечатления, и он с удовольствием стал рассказывать, как шли они вдоль реки, потом заблудились, но он — отважный следопыт — нашел дорогу. Конечно, Незнайка умолчал о главном: заблудились они потому, что он предложил идти напрямик.

— А компас у вас был? — спросил Знайка.

— Зачем нам компас, если у нас карта была.

— Кто же ходит в поход без компаса? — воскликнул Знайка. — Потому и заблудились.

Но Незнайка уже рассказывал о купании в реке, песнях у костра, ночевке в палатках. Он поймал себя на удивительном открытии: врать почти не приходится!

— У меня появилось целых три новых друга! Самое интересное: каждый из нас познакомился ровно с тремя малышами!

— А сколько вас было? — спросил Знайка.

— Сейчас сосчитаю: Пулька, Пончик, Чудик, Топик, Гунька, Носик, Гвоздик, Трубоч и я. Всего получается девять.

Знайка покачал головой:

— Не может такого быть!

— Какого такого? — с подозрением посмотрел Незнайка.

— А такого, что каждый познакомился ровно с тремя малышами.

— Ну и ну, — возмутился Незнайка. — Тебя с нами не было, а заявляешь так, словно своими глазами видел. Я подружился с Чудиком, Топиком и Трубочом, Пулька — с Носиком, Топиком и... я точно не припомню, — Незнайка задумался. — Кто с кем познакомился, я точно не припомню, но то, что новых знакомых у каждого оказалось ровно трое, знаю хорошо.

— Этого не может быть, — повторил Знайка.

— И как ты это узнал, сидя в городе? — засмеялся Незнайка.

— Путем логических рассуждений.

— Каких рассуждений?

— Логических. Давай обозначим каждого малыша точкой, — предложил Знайка.

— Давай, — согласился Незнайка и нарисовал девять точек.

Незнайка

Носик

Пулька

Гвоздик

Пончик

Трубоч

Чудик

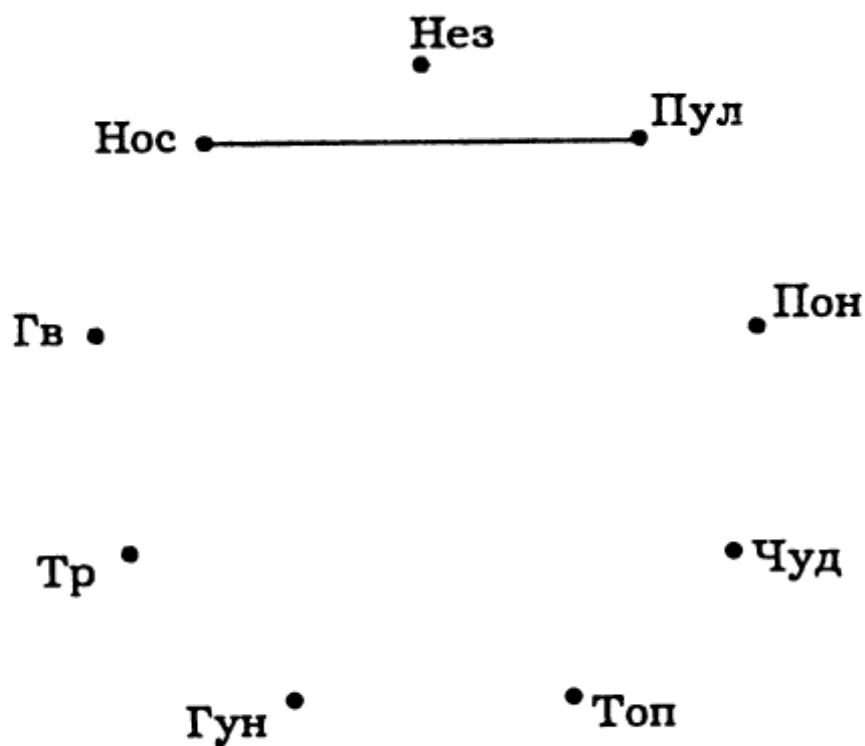
Гулька

Топик

— Зачем они уселись в кружок?

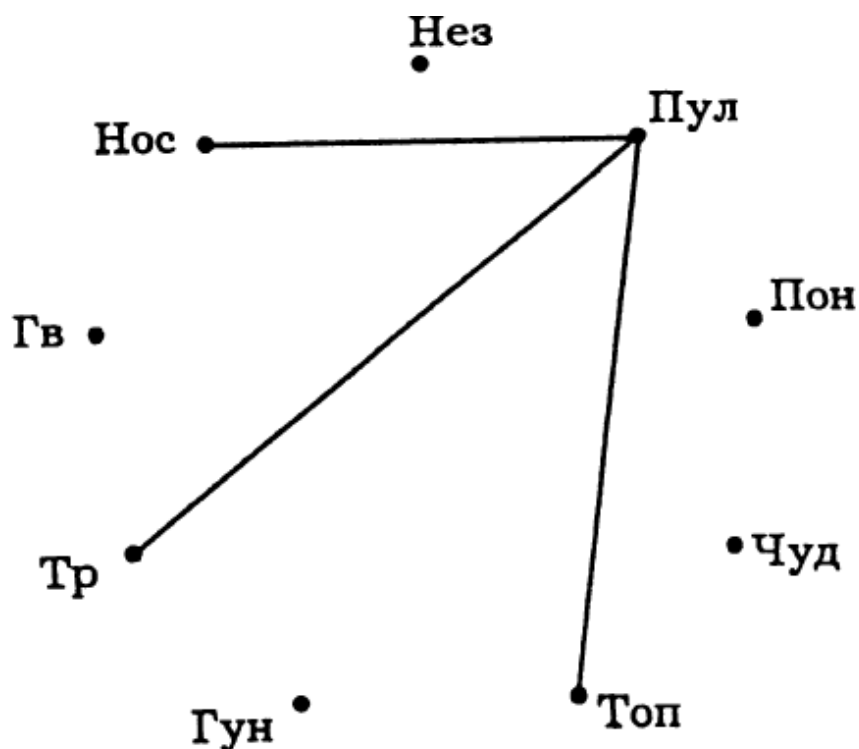
— Для того чтобы лучше знакомиться. Если Пулька познакомился с Носиком, то Носик познакомился с Пулькой. Соединим их точки между собой.

И Знайка провел линию:



— Но он же познакомился еще с Трубочом и... и, допустим, с Топиком.

— Поэтому соединим Пулькину точку с Трубочовой и Топиковой:

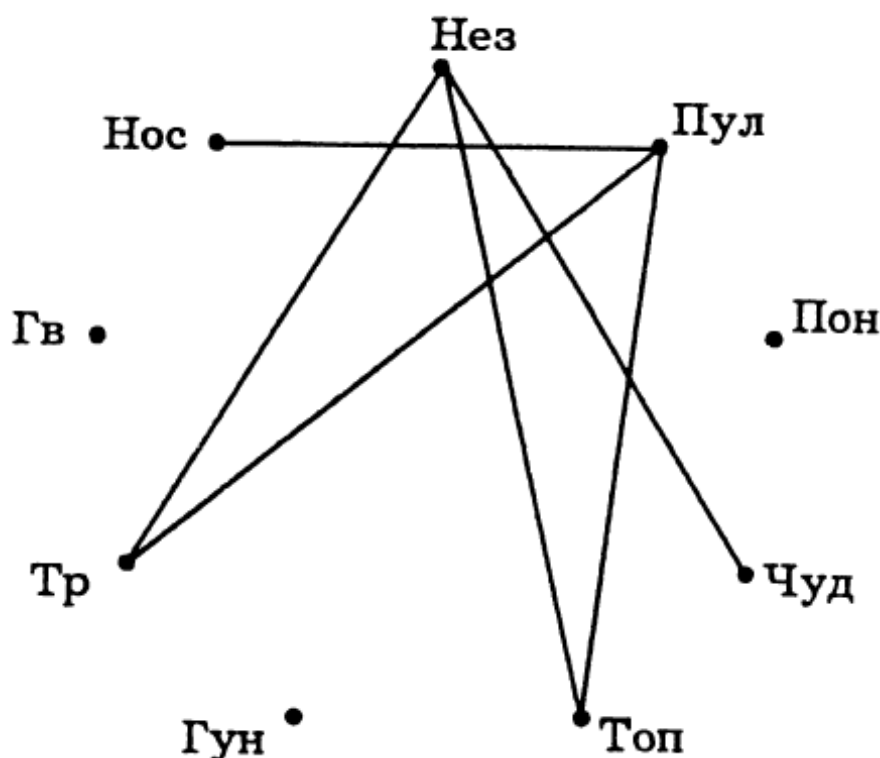


— Ой, картинка получилась! — воскликнул Незнайка.

— От Пулькиной точки отходят три линии, значит, он познакомился с тремя малышами.

— Понял! — закричал Незнайка. — Я тоже познакомился с тремя, значит, и от моей точки должны отходить три линии.

И Незнайка дорисовал.



— Соединим линией каждую пару новых знакомых, — предложил Знайка.

— Но я забыл, кто с кем познакомился, — расстроился Незнайка.

— Не беда. Мы докажем, что невозможно каждому познакомиться ровно с тремя.

— Опять ты за свое! — рассердился Незнайка. — Невозможно, невозможно... А я сам при этом был!

— Наверно, ты ошибся.

— Ты же знаешь, что я редко ошибаюсь.

— Хорошо, — улыбнулся Знайка. — Предположим, что такие знакомства возможны. Если точки обозначают малышей, а линии — знакомства, то ты должен нарисовать картинку с девятью точками...

— За одну минуту, — перебил Незнайка.

— ...А из каждой точки должны выходить три линии.

— Сейчас.

Незнайка принялся за работу. От усердия он даже высунул язык. Он проводил и вытирал линии, перечеркивал картинку и тут же начинал новые. Знайка терпеливо ждал.

— Не получается, — сказал Незнайка минуты через три. — Знаешь, я, должно быть, волнуюсь, а любую работу нужно делать спокойно.

— Спокойно или нет, а у тебя все равно ничего не получится, — засмеялся Знайка. — Ты сказал, что каждый из малышей познакомился с тремя. Значит, всех знакомств было  $3 \times 9 = 27$ .

— Ха-ха-ха, — теперь уже засмеялся Незнайка. — Но если я, к примеру, познакомился с Топиком, то и он познакомился со мной. Значит, знакомств на самом деле было в два раза меньше.

— Конечно, — согласился Знайка. — На рисунке каждое знакомство соответствует линии между двумя точками. Значит, на рисунке должно быть  $27 : 2 = 13,5$  линии.

— А что такое пол-линии? — удивился Незнайка. — Если малыши познакомились, на рисунке появляется линия между их точками, если же они были знакомы раньше, никакой линии не будет. У нас не может быть пол-линии.

— Правильно, не может, — сказал Знайка. — Значит, и обязательных трех новых знакомств у каждого из малышей быть не может.

Незнайка почесал затылок. Хочешь — не хочешь, а Знайка прав, придется с этим согласиться.

— Да, — протянул он, — не может. Наверное, я ошибся. Должно быть, Пончик познакомился не с тремя, а с пятью малышами.

— И это невозможно, — возразил Знайка. — У кого-то из ваших туристов должно быть четное число знакомств. Ты хоть помнишь, что такое четное число?

— Конечно, — обиделся Незнайка. — Это такое число, которое делится нацело на два. А нечетное на два не делится.

— А знаешь, что такое граф?

— Граф? Конечно, знаю, — ответил Незнайка. — Это такой важный господин со шпагой, гербом и слугами. Графы жили в давние времена, были богаты и имели много знатных предков, портреты которых развешивали в своих замках.

— Правильно. И наше слово «граф» тоже древнего происхождения и тоже имеет славных родственников: биография — жизнеописание, география — землеописание, графит — стержень для письма и так далее. Все эти слова имеют один корень:

«граф», который происходит от греческого слова *grapho* — писать.

Граф, про который я хочу поговорить с тобой, состоит из точек и линий, соединяющих некоторые пары точек. Точки называются *вершинами*, а линии — *ребрами*. Две вершины, которые соединены ребром, называются *смежными*.

— Значит, та картинка, которую мы нарисовали, будет графом? — спросил Незнайка.

— Конечно! Назовем его графом знакомств. Точки (вершины) обозначают малышей...

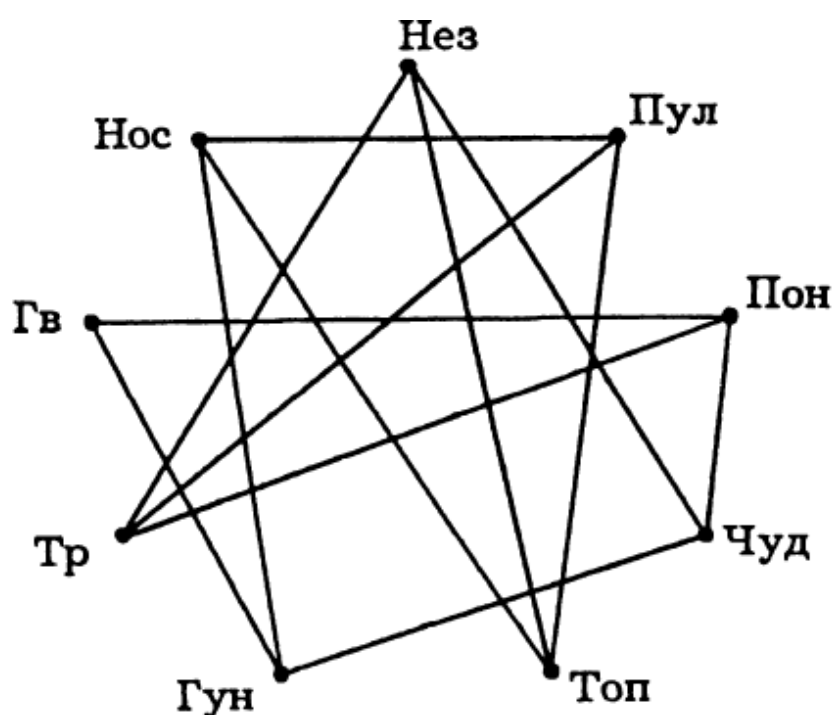
— ...А линии (ребра) — знакомства между малышами, — закончил мысль друга Незнайка.

— Давай нарисуем граф знакомств полностью.

— Но я же забыл, кто с кем познакомился.

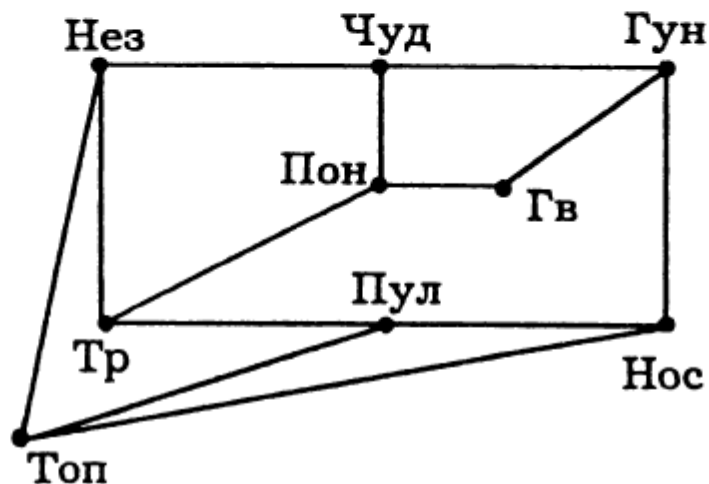
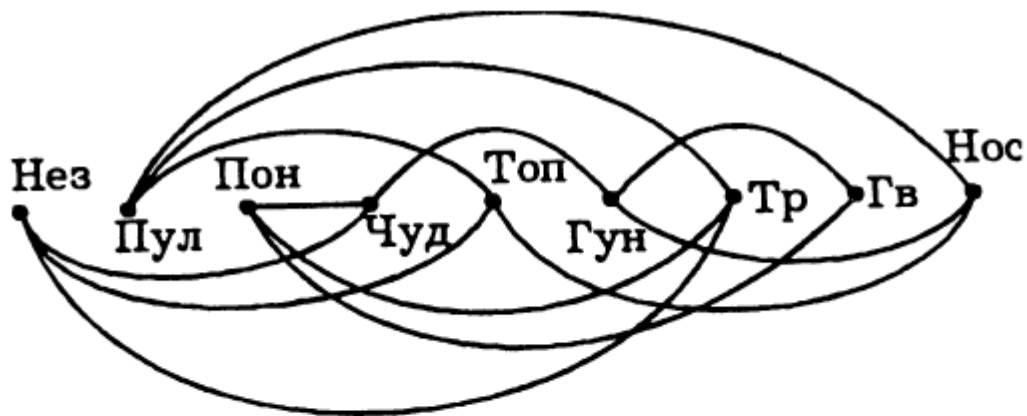
— Ты, наверное, знаешь некоторых малышей, которые были раньше знакомы, и я знаю некоторых. Смотри, вон Гунька бежит, он нам поможет.

Они остановили Гуньку, объяснили ему, чего хотят, и через пять минут общими усилиями нарисовали такую картинку:



— А почему ты нарисовал точки в таком порядке? — спросил Гунька. — На полянке мы сидели совсем не так.

— Не имеет значения, как расположены вершины графа, главное, как они соединены, — сказал Знайка и нарисовал еще два рисунка.



— Эти рисунки задают тот же граф знакомств, что и первый.

— Не может быть! — в один голос воскликнули Незнайка и Гунька. — Они совсем не похожи!

— Посмотрите: Носик познакомился с Пулькой, Топиком и Гунькой и на первом рисунке, и на втором, и на третьем. А если между Незнайкой и Пулькой нет линии на первом рисунке, то нет и на других. И так для каждой пары малышей.

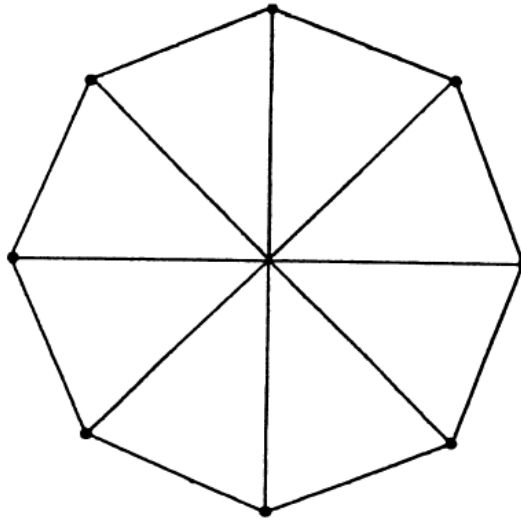
Внимательно посмотрев, Незнайка и Гунька убедились, что все на самом деле так. Все три графа рассказывали о новых знакомых малышей одинаково.

— Такие графы называются *изоморфными*, — сказал Знайка, подняв палец. — Они устроены одинаково, хотя нарисованы по-разному.

— Я ошибся чуть-чуть, — заметил Незнайка. — Да, у Гвоздика два новых знакомства, но у остальных по три.

— Я же говорил, что у кого-то должно быть четное число знакомств, — ответил Знайка.

— Разве так бывает всегда? — удивился Незнайка и тут же нарисовал картинку:



— А как зовут этих малышей? — спросил Гулька.

— Какая разница, как их зовут, — ответил Незнайка. — Главное, что из каждой точки выходят три линии. Значит, каждый из малышей познакомился с тремя другими. А Знайка сказал, что это невозможно.

И Незнайка победно посмотрел на Знайку. Но Знайку было не так-то просто сбить с толку.

— Сколько у тебя вершин? — спросил он.

— Восемь!

— А на прогулке было девять малышей. Все, что мы говорили о знакомствах, верно для групп из нечетного количества малышей.

— Жаль, — печально проговорил Незнайка. Он уже предвкушал, как будет рассказывать всем, что смог посадить в лужу самого Знайку.

— Давайте посмотрим на наш граф знакомств. Сложим числа знакомств всех малышей:

ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ НЕЗНАЙКИ  
+  
ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ПУЛЬКИ  
+  
ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ПОНЧИКА  
+  
ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ГУЛЬКИ  
+  
ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ТОПИКА  
+  
ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ЧУДИКА  
+  
ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ТРУБАЧА  
+  
ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ГВОЗДИКА  
+  
ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ НОСИКА

---



— Что получилось под чертой? — спросил Знайка.

— Сумма знакомств, — ответил Гунька.

— Нет, — возразил Незнайка. Он помнил то, о чем они говорили раньше. — Каждое знакомство считается дважды. Поэтому получилось удвоенное число знакомств.

— Правильно, — подтвердил Знайка. — Количество линий (ребер), выходящих из точки (вершины графа), называется *степенью вершины*.

— Она равна числу знакомств малыша? — спросил Гунька.

— Конечно, — важно подтвердил Незнайка. Ему нравилось, что он может кое-что объяснить Гуньке. — А каждая линия, или ребро, соответствует знакомству.

— Верно, — сказал Знайка. — Поэтому мы с вами доказали интересную теорему...

— А что такое теорема? — спросил Гунька, услышав незнакомое слово.

— Это такое утверждение, про которое сразу нельзя сказать, правильное оно или нет. Его нужно доказывать.

— Значит, то, что Незнайка всегда задается, не будет теоремой, — сказал Гунька и тут же получил от Незнайки подзатыльник.

— Так вот, — продолжил Знайка, — мы доказали интересную теорему:

---

*В графе сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер.*

---

— А вот и неправильно, — возразил Незнайка. — Надо говорить: в графе с девятью вершинами сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер, то есть будет четным числом. Мы-то рассматривали граф с девятью вершинами.

— Молодец, Незнайка, заметил, — похвалил Знайка. — Но все, что мы говорили о графе с девятью вершинами, можно сказать о графе с любым числом вершин.

— Конечно, — сказал Гунька. Ему очень хотелось показать, что он понимает не меньше, чем Незнайка. — Какая разница, сколько знакомств складывать — девять, или двадцать, или сорок.

— Верно, Гунька. Это утверждение верно для графов с любым числом вершин. Оно носит название *леммы о рукопожатиях*.

— А что такое лемма? — спросил Гунька.

— Лемма — это вспомогательная теорема, с ее помощью доказываются другие теоремы.

— Но при чем же здесь рукопожатия? Мы же говорили о знакомствах!

— Какой ты непонятливый! — закричал Незнайка. — Мы нарисовали граф знакомств, а можем нарисовать граф рукопожатий. Малыши — это вершины графа (точки). Пожали малыши друг другу руки — соединим их вершины ребром. Получим граф. А в нем сумма степеней вершин равна удвоенному числу рукопожатий. Понял?

— Понял, понял, — поспешно согласился Гунька. — Но если лемма — помощница в доказательстве, то чему помогает это лемма?

— Она используется очень часто, — ответил Знайка. — Давайте докажем, что *число вершин нечетной степени в любом графе четное*.

— Это почему? — спросил Гунька.

— А я знаю! — обрадовался Незнайка. — Из леммы о рукопожатиях. Сложим степени всех вершин. По лемме о рукопожатиях должно получиться четное число. Но если в графе будет нечетное число вершин нечетной степени, то при их сложении четное число не получится никак!

— Теперь ты понял, почему каждый из вас не мог познакомиться с нечетным числом малышей? — спросил Знайка Незнайку.

— Конечно, понял: нельзя нарисовать граф с девятью вершинами так, чтобы из каждой вершины выходило нечетное число ребер.

— Молодец, Незнайка! Я тебе еще что-нибудь расскажу.

Но Незнайка уже бежал по улице и рассказывал всем встречным, как Знайка, который не ходил в поход, узнал, кто с кем там познакомился.